Mathematik

Serie A - Lösungen

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
1. Fehler: Abzug von 50 % der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom November 2016, KKB Kanton Zürich.

Notenskala

Punkte	0 – 4	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94	95 – 100
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

Aufgabe 1

7 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems.

$(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

(1) $\frac{4}{x} + \frac{4}{y-1} = 1$

(2) $\frac{2}{x} - \frac{4}{y-1} = 1$

Lösungsdetails		**Punkte**
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}\backslash\{0\},\ \mathbb{D}_y = \mathbb{R}\backslash\{1\}$		*2*
Additionsverfahren:		
$\frac{6}{x} = 2$		
$x = 3;\ y = -11$		*3, 2*
$\mathbb{L} = \{(3;\ -11)\}$		
Abzüge:	*Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge*	*-1*

Aufgabe 2

20 Punkte

Die Gornergratbahn überlegt sich eine neue Zugkomposition anzuschaffen. Ein Zug soll Sitze in der 2. Klasse (x = Anzahl Sitze in der 2. Klasse) und etwas komfortablere in der 1. Klasse (y = Anzahl Sitze in der 1. Klasse) aufweisen.

Es müssen mindestens 100 Sitze pro Zug sein. In einem Zug können höchstens entweder 150 Sitze 1. Klasse oder 200 Sitze 2. Klasse oder eine entsprechende Kombination davon eingebaut werden.

Mindestens ein Drittel aller Sitze soll in der 1. Klasse sein. Der Anteil Sitze der 1. Klasse soll allerdings nicht mehr als halb so hoch sein wie derjenige der 2. Klasse. Die Anschaffung eines 1.-Klass-Sitzes kostet CHF 200.00, die eines 2.-Klass-Sitzes CHF 120.00. Für deren Beschaffung stehen maximal CHF 45'000.00 zur Verfügung.

Die Bergfahrt in der 2. Klasse kostet CHF 95.00, in der 1. Klasse CHF 135.00.

a) Man möchte ermitteln, bei welcher Sitz-Kombination die Einnahmen pro Bergfahrt am höchsten sind. Erstellen Sie dafür das lineare Programm und formulieren Sie die Zielfunktion (ohne Grafik). (6)

Lösungsdetails	**Punkte**
x = Anzahl Sitze in der 2. Klasse y = Anzahl Sitze in der 1. Klasse $(x \geq 0, y \geq 0)$ *(1)* $x + y \geq 100$ *(2)* $y \leq -\frac{150}{200}x + 150$ *oder* $\frac{x}{200} + \frac{y}{150} \leq 1$ *(3)* $y \geq \frac{1}{3}(x + y)$ *(4)* $y \leq \frac{1}{2}x$ *(5)* $200y + 120x \leq 45'000$ *Zielfunktion:* $z_{max} = 95x + 135y$	*Je 1*
Abzüge:	

b) Die Analyse eines externen Beraters hat für die Anzahl Sitze in der 2. Klasse (x) resp. in der 1. Klasse (y) folgendes lineare Programm ergeben: (8)

(1) $y \leq 60$

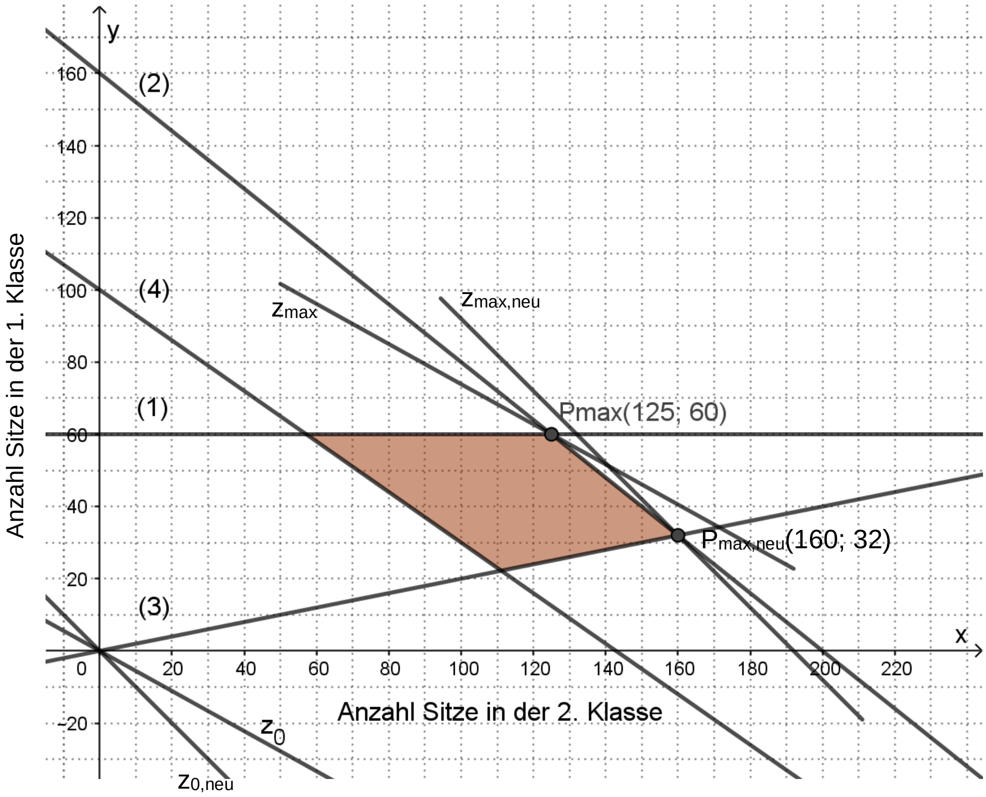
(2) $y \leq -0.8x + 160$

(3) $y \geq \frac{1}{5}x$

(4) $y \geq -\frac{7}{10}x + 100$

Die Bergfahrt in der 2. Klasse kostet neu CHF 75.00, in der 1. Klasse CHF 135.00. Formulieren Sie die Zielfunktion für die maximalen Einnahmen pro Bergfahrt.

Zeichnen Sie das entsprechende Planungspolygon mit Zielfunktion.

Lösungsdetails	Punkte
$z_{max} = 75x + 135y \rightarrow y = -\frac{5}{9}x + c$	*1*
	*Geraden: 4* *Polygon: 1* *z/P je 1*
Abzüge: *Fehlende Beschriftungen (Achsen, Geraden)*	*max. -2*

c) Berechnen Sie, wie viele Sitze in jeder Klasse ein Zug haben muss, wenn die Einnahmen pro Bergfahrt maximal werden sollen. Wie hoch sind diese Einnahmen? (3)

	$(1) = (2) \rightarrow P_{max}(125; 60)$ *Es müssten 125 Sitze in der 2. Klasse und 60 Sitze in der 1. Klasse sein.* $z = 125 \cdot 75 + 60 \cdot 135 = 17'475$	*2*
	Die maximal möglichen Einnahmen pro Bergfahrt sind CHF 17'475.00.	*1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

d) Wie viele Sitze kann ein Zug haben, wenn die Anzahl Sitze maximal sein soll? (3)

	$z_{max,neu} = x + y$	*1*
	$(2) = (3) \rightarrow P_{max,neu}(160; 32)$	*1*
	Es sind maximal 192 Sitze möglich.	*1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 3

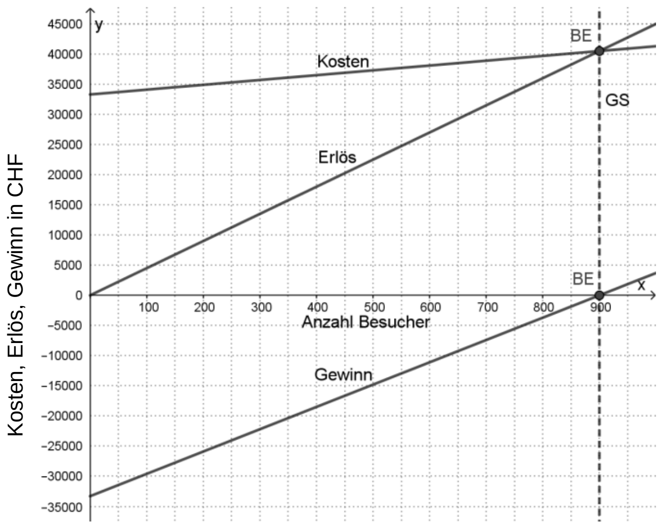
11 Punkte

Ein Verein plant einen Grossanlass. Pro Besucher wird mit Einnahmen von CHF 45.00 gerechnet. Um die Fixkosten von CHF 33'300.00 zu kompensieren, braucht es 900 zahlende Besucher.

a) Ermitteln Sie die Erlös-, die Gewinn- und die Kostenfunktion für diesen Anlass. (5)

Lösungsdetails		**Punkte**
$x = \text{Anzahl Besucher}$		
$y = \text{Beträge in CHF}$		
$y_E = 45x$		*1*
$y_G = 37x - 33'300$		*2*
$y_K = 8x + 33'300$		*2*
Abzüge:	*Fehlende Variablen-Definition*	*-1*

b) Stellen Sie den Sachverhalt inklusive Break-Even in einem geeigneten Diagramm übersichtlich dar. (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
		*y_E: 1* *y_K: 1* *y_G: 1* *BE: 1*
Abzüge:	*Fehlende Beschriftungen* *Ungeeignetes Diagramm*	*-1* *-1*

c) Wie viele Besucher sind nötig, um einen Gewinn von CHF 7'400.00 zu erwirtschaften? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$7'400 = 37x - 33'300$		
Es werden 1'100 Besucher benötigt.		*2*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 4

6 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge der folgenden Gleichung. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

$\frac{4x^2-9}{x-1} - 2 = 3x - \frac{5x}{x-1}$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$		*1*
$4x^2 - 9 - 2x + 2 = 3x^2 - 3x - 5x$		*1*
$x^2 + 6x - 7 = 0$		*1*
$x_1 = -7;\ \ x_2 = 1$		*2*
$\mathbb{L} = \{-7\}$		*1*
Abzüge:	*Fehlende Lösungsmenge*	*-1*

Aufgabe 5

8 Punkte

Gegeben ist die quadratische Funktion $f: y = x^2 + 7.5x - 4$

a) Ermitteln Sie die Nullstellen und den y-Achsen-Schnittpunkt. (3)

b) Ermitteln Sie den Scheitelpunkt und die Scheitelpunktform. (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
a)	$N_1(-8; 0)$ $N_2(0.5; 0)$ $S_y(0; -4)$	*Je 1*
b)	$y = (x + 3.75)^2 - 18.0625$	*1*
	$S(-3.75; -18.0625)$	*2*
Abzüge:		

Eine andere quadratische Funktion hat die Scheitelpunktform $h: y = (x - 5.5)^2 + 4.75$

c) Wie lautet die Scheitelpunktform dieser Funktion, wenn man ihren Graphen horizontal um 5 Einheiten nach rechts und vertikal um 5 Einheiten nach unten verschiebt? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$y = (x - 10.5)^2 - 0.25$		*2*
Abzüge:		

Aufgabe 6

13 Punkte

a) Mit welchem Prozentsatz wird eine Maschine jährlich degressiv abgeschrieben, wenn ihr Buchwert 7 Jahre nach dem Kauf noch einen Viertel ihres Anschaffungswertes beträgt? Runden Sie das Resultat auf die nächste ganze Zahl auf. (3)

Lösungsdetails		Punkte
x = Abschreibungssatz in % $1\left(1-\frac{x}{100}\right)^7 = 0.25 \qquad x = 17.966$ *Die Maschine wird jährlich mit 18 % abgeschrieben.*		*2, 1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

b) Joëlle legt CHF 2'000.00 zu 1.2 % an. Ihre Tante investiert CHF 2'199.00 zu 0.6 %. Nach wie vielen ganzen Jahren besitzt Joëlle zum ersten Mal mehr Geld als ihre Tante auf dem Konto? (6)

Lösungsdetails		Punkte
x = Zeit in Jahren $2'000 \cdot 1.012^x = 2'199 \cdot 1.006^x$ $x = \frac{log(2'199) - \log(2'000)}{log(1.012) - \log(1.006)} = 15.95$ *Nach 16 ganzen Jahren besitzt Joëlle zum ersten Mal etwas mehr Geld.*		*2* *4*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz* *Falsche oder fehlende Rundung*	*-1* *-1*

c) Eine junge Familie nimmt eine Hypothek von CHF 600'000.00 zu 1.05 % auf. Die Hypothek soll innert 15 Jahren nachschüssig zurückbezahlt werden. Wie hoch sind die jährlichen Raten? Runden Sie das Resultat auf den nächsten Franken auf. (4)

Lösungsdetails		Punkte
x = Rate in CHF, R_0 = 600'000, q = 1.0105, n = 15 $600'000 \cdot 1.0105^{15} = x \cdot \frac{1.0105^{15}-1}{0.0105}$ $x = 43'441.857$ *Eine jährliche Rückzahlung beträgt CHF 43'442.00.*		*3* *1*
Abzüge:	*CHF 600'000.00 als Endwert eingesetzt* *Fehlender Antwortsatz* *Falsche oder fehlende Rundung*	*-2* *-1* *-1*

Aufgabe 7

12 Punkte

Nach einem zweiwöchigen Auslandaufenthalt wurden die Teilnehmer befragt, wie viel Geld (in CHF) sie in dieser Zeit ausgegeben haben. Folgende Antworten wurden gegeben:

390 / 250 / 320 / 460 / 280 / 120 / 680 / 380 / 320 / 420 / 510 / 360 / 180 / 350 / 400 / 660

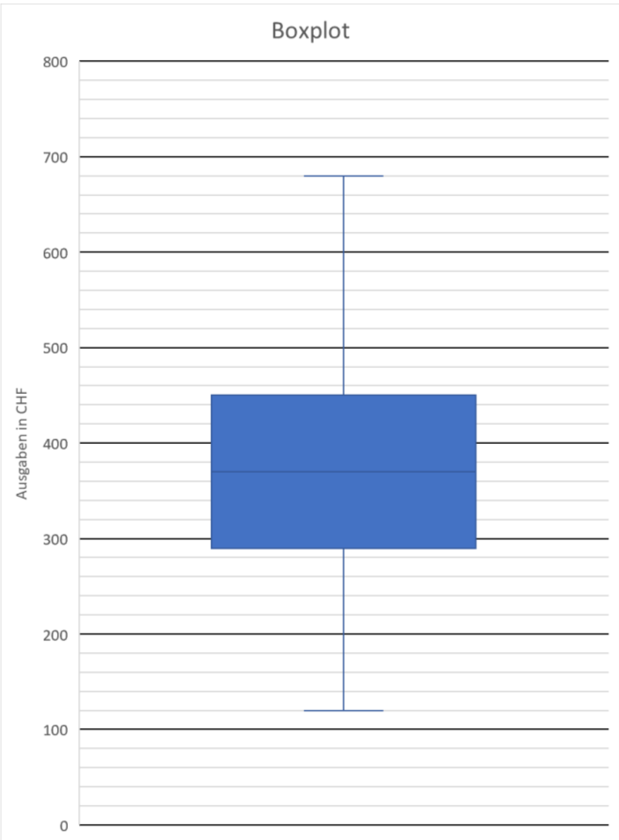
a) Ermitteln Sie die folgenden Werte und füllen Sie die Tabelle aus. (9)

Modus	
Median	
Mittelwert	
Spannweite	
1. Quartil	
3. Quartil	
Interquartilsdifferenz	

b) Erstellen Sie den zugehörigen Boxplot. (3)

Lösungsdetails		Punkte
Modus	320	*1*
Median	370	*1*
Mittelwert	380	*1*
Spannweite	560	*1*
1. Quartil	$i_{Q1} = \frac{1}{4}(n+1) = \frac{1}{4}(17) = 4.25$ $Q_1 = 280 + 0.25 \cdot (320 - 280) = 290$	*2*
3. Quartil	$i_{Q3} = \frac{3}{4}(n+1) = \frac{3}{4}(17) = 12.75$ $Q_3 = 420 + 0.75 \cdot (460 - 420) = 450$	*2*
Interquartilsdifferenz	160	*1*
Abzüge:		

b) Erstellen Sie den zugehörigen Boxplot.

Lösungsdetails	Punkte
	$\tilde{x}$: *1* *Box: 1* *Whisker: 1*
Abzüge:	

Aufgabe 8

6 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).

a) $(x+7)^{-5} = 0.00001$ (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-7\}$		*1*
$x + 7 = 10$		*1*
$x = 3 \quad \mathbb{L} = \{3\}$		*1*
Abzüge:	*Fehlende Lösungsmenge*	*-1*

b) $log_5(3x-22) = 3$ (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{22}{3}\right\}$		*1*
$5^3 = 3x - 22$		*1*
$x = 49 \quad \mathbb{L} = \{49\}$		*1*
Abzüge:	*Fehlende Lösungsmenge*	*-1*

Aufgabe 9

13 Punkte

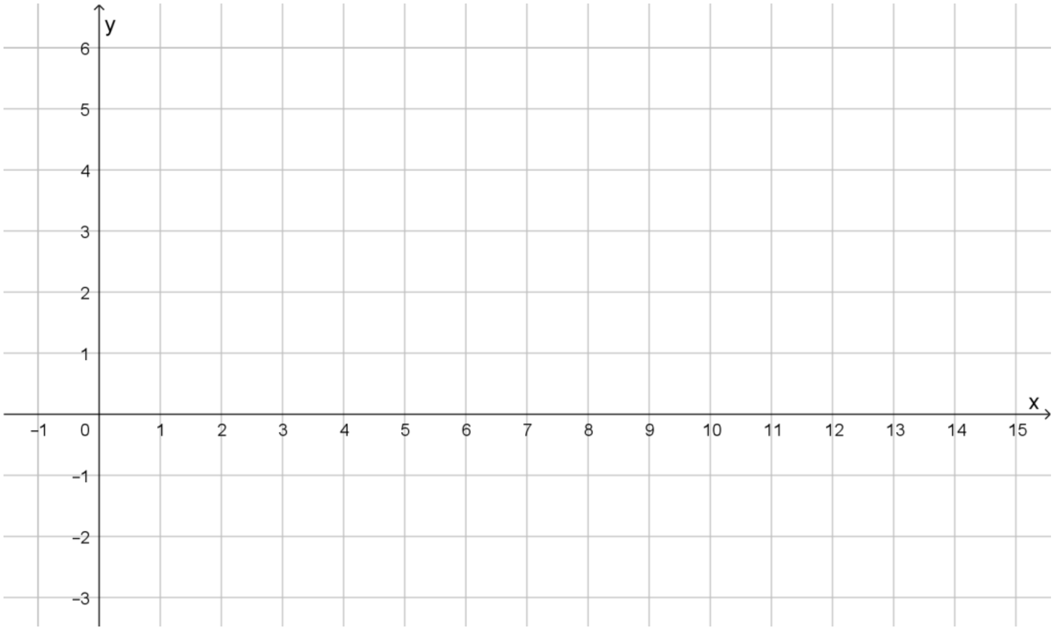
Gegeben ist folgende Funktion f $(\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$:

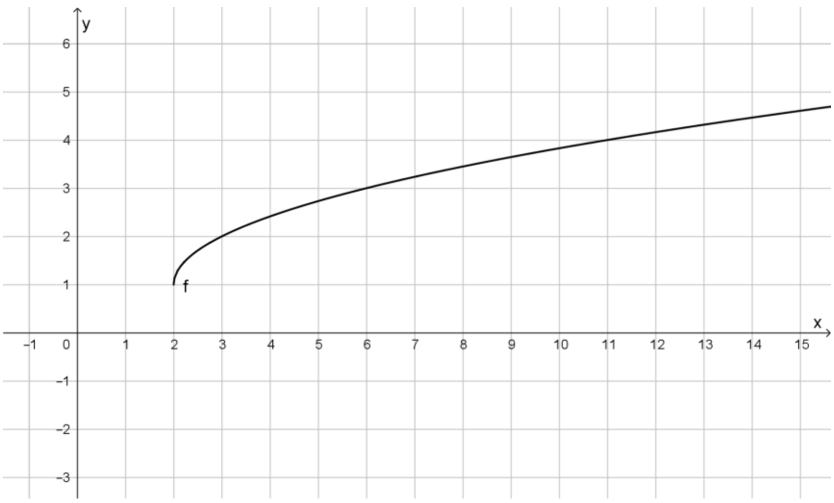
$$y = \sqrt{x-2} + 1$$

a) Ermitteln Sie den Definitions- und den Wertebereich der Funktion f. (2)

Lösungsdetails	**Punkte**
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$ $\mathbb{W} = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 1\}$	*1* *1*

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in das vorgegebene Koordinatensystem. (3)



Lösungsdetails		**Punkte**
		*3* *(1 pro char. Pt.)*
Abzüge:	*Qualität des Graphen ungenügend* *Fehlende Bezeichnung des Graphen*	*-1* *-1*

c) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion f^{-1} in der Form $y = \cdots$.
(Definitions- und Wertebereich sind nicht verlangt.) (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\text{x} = \sqrt{y-2} + 1$ $\text{x} - 1 = \sqrt{y-2}$ $y = (x-1)^2 + 2$		*1* *2*
Abzüge:		

d) Berechnen Sie allfällige Schnittpunkte von der Funktion f mit der Geraden g. Die Gerade hat die Funktionsgleichung $g: y = 0.5x - 4$ (5)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\sqrt{x-2} + 1 = 0.5x - 4$ $x - 2 = (0.5x - 5)^2$ $x - 2 = 0.25x^2 - 5x + 25$ $0 = 0.25x^2 - 6x + 27$ $0 = x^2 - 24x + 108$ $x_1 = 6, x_2 = 18$ *6 ist eine Scheinlösung* → $P(18; 5)$		*1* *1* *2* *1*
Abzüge:	*Keine Überprüfung der Lösungen*	*-1*

Aufgabe 10

4 Punkte

Vereinfachen Sie den folgenden Term soweit wie möglich.

$\frac{2a+4}{a^2-3a-10} : \frac{4a}{2a^2-4a-30}$

Lösungsdetails		**Punkte**
$\frac{2(a+2)}{(a-5)(a+2)} \cdot \frac{2(a^2-2a-15)}{4a} =$ $\frac{2(a+2)}{(a-5)(a+2)} \cdot \frac{2(a+3)(a-5)}{4a} = \frac{a+3}{a}$		2 2
Abzüge:		