

Mathematik

Serie A - Lösungen

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:

1. Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktezahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom November 2016, KKB Kanton Zürich.

Dieser Lösungs- und Bewertungsschlüssel darf nur von Mathematik-Lehrenden kaufmännischer Berufsschulen verwendet werden. Insbesondere darf er in späteren Jahren im Unterricht zu Übungszwecken nicht 1:1 kopiert und an Lernende abgegeben werden. Jede weitere Verwendung der Originalprüfung wie auch dieses Schlüssels bedarf der Bewilligung der Kommission Kaufmännische Berufsmatura, Kt. ZH. Kommerzielle Verwendung - auch nur auszugsweise - bleibt untersagt.

Notenskala

Punkte	0 – 4	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94	95 – 100
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

Aufgabe 1

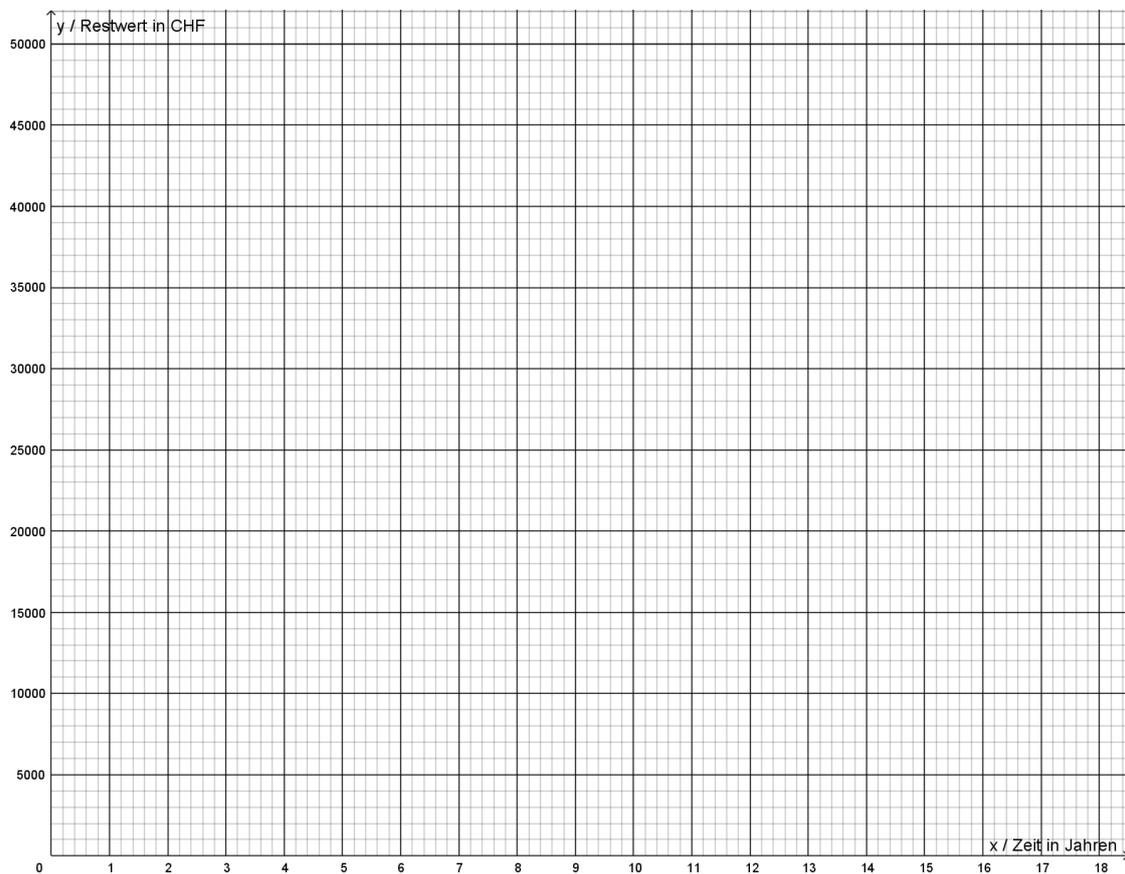
5 Punkte

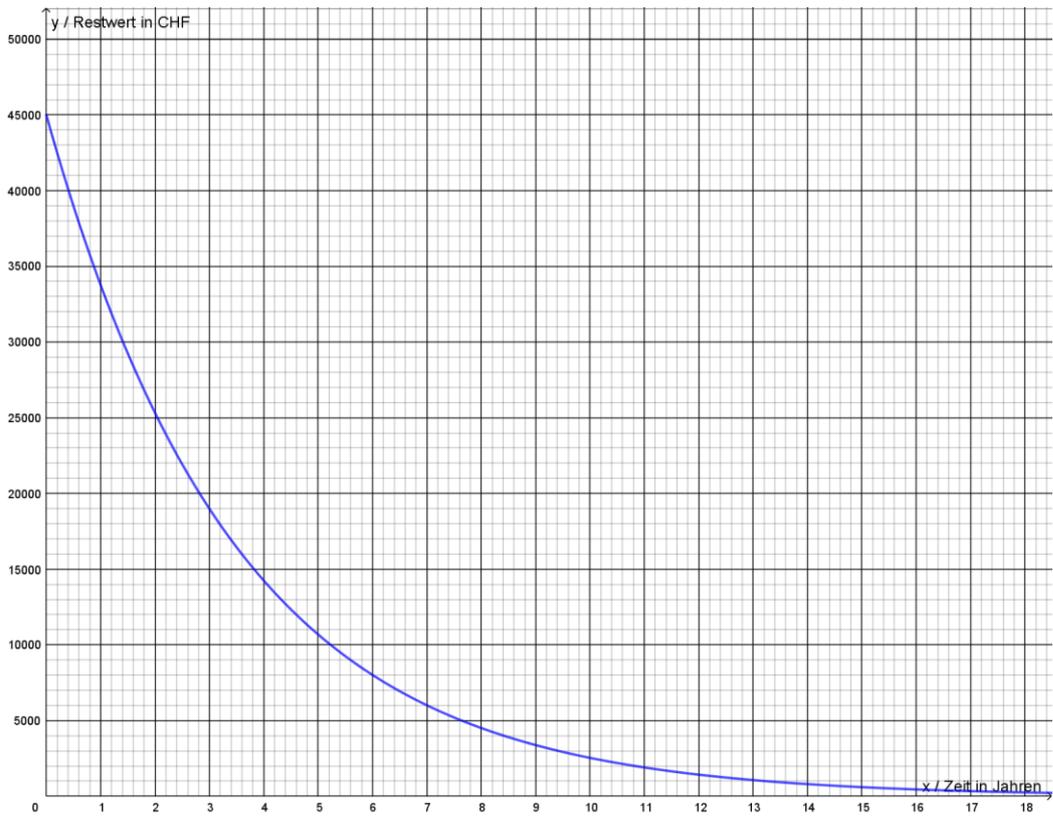
Ein Auto wird für CHF 45'000.00 angeschafft und jährlich mit 25 % degressiv abgeschrieben.

- a) Wie lautet die Funktionsgleichung, nach welcher abgeschrieben wird? (2)
x = Zeit in Jahren
y = Restwert in CHF

Lösungsdetails		Punkte
a) $y = 45000 \cdot 0.75^x$		2
Abzüge:		

- b) Erstellen Sie im untenstehenden Koordinatensystem eine Grafik, mit welcher der Restwert des Autos in Abhängigkeit der Anzahl Jahre aufgezeigt wird. (3)



Lösungsdetails		Punkte
 <p>The graph shows a decreasing curve on a coordinate system. The vertical axis is labeled 'y / Restwert in CHF' and ranges from 0 to 50000 with major grid lines every 5000 units and minor grid lines every 1000 units. The horizontal axis is labeled 'x / Zeit in Jahren' and ranges from 0 to 18 with major grid lines every 1 unit and minor grid lines every 0.2 units. The curve starts at the point (0, 45000) and decreases as x increases, passing through approximately (2, 25000), (4, 15000), (6, 10000), (8, 7000), (10, 5500), (12, 4500), (14, 3800), (16, 3200), and (18, 2800).</p>		3
Abzüge:		

Aufgabe 2

15 Punkte

a) Vor 7 Jahren zahlte Lina CHF 7'000.00 auf ein neu eröffnetes Sparkonto ein. Sie hat nun CHF 7'504.95 auf dem Konto.

a1) Wie gross ist der seit 7 Jahren unveränderte Zinssatz? (3)

a2) Wie viel Geld muss sie heute zusätzlich einzahlen, damit sie bei einem Zinssatz von 1 % in 3 Jahren CHF 10'000.00 auf dem Konto hat? (4)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Zinssatz in \%}$ $7'000 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^7 = 7'504.95 \quad x \approx 1$ <i>Der Zinssatz betrug 1%</i>		2, 1
$y = \text{einzuzahlender Betrag in CHF}$ $(7'504.95 + y) \left(1 + \frac{1}{100}\right)^3 = 10'000$ $y = 2'200.95$ <i>Sie muss CHF 2'200.95 einzahlen.</i>		3 1
Abzüge:	Fehlende Antwortsätze	Je -1

b) In 16 Jahren wuchs ein Kapital von CHF 13'030.00 auf CHF 14'170.00 an. Während der ersten Hälfte der Anlagedauer war der Zinssatz doppelt so hoch wie während der zweiten Hälfte. Wie hoch war der Zinssatz in der zweiten Hälfte?

Stellen Sie den Sachverhalt in Form einer Gleichung dar, **ohne sie zu lösen.** (4)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Zinssatz während der zweiten Hälfte in \%}$ $13030 \left(1 + \frac{2x}{100}\right)^8 \left(1 + \frac{x}{100}\right)^8 = 14170$		4
Abzüge:	Fehlende Variablendefinition	-1

- c) Sie haben sich einen Rentenendwert von einer Million Franken zum Ziel gesetzt und möchten dies mit Zahlungen von je CHF 10'000.00 jeweils Ende Jahr erreichen. Sie rechnen mit einer mittleren Verzinsung von 2.5 %. Wie oft müssen Sie einzahlen, bis Sie das Ziel erreicht haben? (4)

Lösungsdetails		Punkte
$R_n = 1'000'000, r = 10'000, q = 1.025$ $1'000'000 = 10'000 \cdot \frac{1.025^n - 1}{0.025}$ $n = \frac{\log\left(\frac{1000000 \cdot 0.025}{10000} + 1\right)}{\log(1.025)} = 50.73$ <i>Ich muss 51 Mal einzahlen, um das Ziel zu erreichen.</i>		<p>1</p> <p>2 (umf.)</p> <p>1 (Res.)</p>
Abzüge:	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1
	<i>Falsche oder keine Rundung</i>	-1

Aufgabe 3

18 Punkte

Ein Zoo plant ein neues Gehege mit Giraffen (x) und Zebras (y). Die Besucher sollen mindestens 40 Tiere bestaunen können. Damit ein friedliches Zusammenleben garantiert ist, muss es mindestens 40 % mehr Giraffen als Zebras haben, höchstens aber doppelt so viele Giraffen wie Zebras. Eine Giraffe frisst pro Tag 70 kg Laub, ein Zebra 35 kg Gras und Heu. Dieses Futter muss hinzugeführt werden. Der Futtertransporter kann täglich nicht mehr als 2.8 Tonnen pflanzliche Nahrung liefern. Pro Zebra werden mindestens 300 m² Fläche benötigt, pro Giraffe doppelt so viel. Insgesamt stehen dem Zoo für die neue Anlage höchstens 40'000 m² zur Verfügung.

Die monatlichen Spendeneinnahmen für ein Zebra betragen CHF 1'000.00, für eine Giraffe werden pro Monat CHF 2'300.00 gespendet. Wie viele Giraffen und Zebras soll der Zoo anschaffen, damit die Spendengelder möglichst hoch ausfallen?

a) Erstellen Sie das lineare Programm und formulieren Sie die Zielfunktion (ohne Grafik). (6)

Lösungsdetails	Punkte
$x = \text{Anzahl Giraffen}, y = \text{Anzahl Zebras}$	
(1) $x + y \geq 40$	1
(2) $x \geq 1.4y$	1
(3) $x \leq 2y$	1
(4) $70x + 35y \leq 2'800$	1
(5) $300y + 600x \leq 40'000$	1
Zielfunktion : $1'000y + 2'300x = z$	1
Abzüge:	

b) Ein anderer Zoo hat bereits ein Gehege mit Giraffen (x) und Zebras (y) angelegt. Sein lineares Programm sieht wie folgt aus: (9)

$$(1) x \leq 100$$

$$(2) y \leq -\frac{2}{3}x + 120$$

$$(3) y \geq \frac{1}{3}x$$

$$(4) y \leq \frac{2}{3}x + 40$$

$$(5) y \geq -x + 60$$

Die monatlichen Unterhaltskosten für ein Zebra betragen CHF 1'500.00, für eine Giraffe CHF 2'100.00. Formulieren Sie die Zielfunktion.

Erstellen Sie ein entsprechendes Planungspolygon mit Zielfunktion für die minimalen Kosten.

Lösungsdetails		Punkte
$z_{\min} = 2'100x + 1'500y \rightarrow y = -\frac{7}{5}x + c$		1
<p>The graph shows a coordinate system with x-axis 'Anzahl Giraffen in Stück x' and y-axis 'Anzahl Zebras in Stück y'. A shaded feasible region is bounded by lines (1) through (5). The minimum cost point P_{\min} is at (12; 48). The cost function z_m is shown as a line passing through P_{\min}. The origin is labeled z_0.</p>		5 Polygon: 1 z/P je 1
Abzüge:		

- c) Wie viele Giraffen und Zebras hat es in diesem Zoo, wenn die monatlichen Unterhaltskosten minimal sind? Wie hoch sind diese Kosten? (3)

$(4) = (5) \rightarrow P_{\min}(12; 48)$ <i>Es hat 12 Giraffen und 48 Zebras im Zoo.</i>	2
$z = 12 \cdot 2'100 + 48 \cdot 1'500 = 97'200$ <i>Die monatlichen Unterhaltskosten betragen CHF 97'200.00.</i>	1
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz
	-1

Aufgabe 4

8 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems.

($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

$$(1) \quad \frac{5}{ax} + \frac{4}{3y} = -3$$

$$(2) \quad \frac{6}{ax} - \frac{8}{3y} = -2$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{0\}, a \neq 0$ $(1) \quad \frac{10}{ax} + \frac{8}{3y} = -6$ $(2) \quad \frac{6}{ax} - \frac{8}{3y} = -2$ $\frac{16}{ax} = -8$ $x = -\frac{2}{a}; y = -\frac{8}{3}$ $\mathbb{L} = \left\{ \left(-\frac{2}{a}; -\frac{8}{3} \right) \right\}$		2
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1

Aufgabe 5

4 Punkte

Drei KV-Auszubildende benötigen zusammen 8 Stunden, um eine Arbeit zu erledigen. Wie lange braucht jeder Auszubildende allein, wenn der Azubi im dritten Jahr halb so lang wie der Azubi im zweiten Jahr benötigt und der Azubi im ersten Jahr 16 Stunden länger als der Azubi im dritten Jahr benötigt?

Stellen Sie den Sachverhalt in Form einer Gleichung dar, **ohne sie zu lösen**.

Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Zeit, die der Azubi im dritten Jahr alleine bräuchte in h}$ $\frac{1}{x+16} + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$ <p><i>! Hier sind mehrere Gleichungen möglich, je nach Definition von x.</i></p>		4
Abzüge:	Fehlende Variablendefinition	-1

Aufgabe 6

16 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).

a) $\sqrt{x+28} + 2 = x$ (7)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -28\}$ $\sqrt{x+28} = x - 2$ $x + 28 = (x - 2)^2$ $x + 28 = x^2 - 4x + 4$ $0 = x^2 - 5x - 24$ $0 = (x - 8)(x + 3)$ $x_1 = 8, x_2 = -3$ -3 ist eine Scheinlösung $\rightarrow \mathbb{L} = \{8\}$		1
		2
		2
		2
<i>Abzüge:</i>	<i>Keine Überprüfung der Lösungen</i>	-2
	<i>Fehlende Lösungsmenge</i>	-1

b) $8 \cdot 3^{x-2} = 4^{x-0.5}$ (5)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$ $\log 8 + (x - 2) \log 3 = (x - 0.5) \log 4$ $\log 8 + x \cdot \log 3 - 2 \cdot \log 3 = x \cdot \log 4 - 0.5 \cdot \log 4$ $\log 8 + 0.5 \cdot \log 4 - 2 \cdot \log 3 = x \cdot \log 4 - x \cdot \log 3$ $\frac{\log 8 + 0.5 \cdot \log 4 - 2 \cdot \log 3}{\log 4 - \log 3} = x$		1
		2
		2
		2
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlende Lösungsmenge</i>	-1

c) $(x + 5)^{-2} = 9^{-1}$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ $x^2 + 10x + 25 = 9$ $x^2 + 10x + 16 = 0$ $(x + 8)(x + 2) = 0$ $x_1 = -8; x_2 = -2$ $\mathbb{L} = \{-2; -8\}$		1
		1
		1, 1
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlende Lösungsmenge</i>	-1

Aufgabe 7

15 Punkte

Bei der Produktion von 2'000 Kopfhörern entstehen Gesamtkosten von CHF 272'000.00. Werden 8'000 Stück produziert, verursachen sie Gesamtkosten von CHF 488'000.00. Die Kostenfunktion verläuft linear.

Auf Grund des sinkenden Preises bei höherer Nachfrage lautet die Erlösfunktion:

$$y_E = -0.0064x^2 + 132x \quad (0 \leq x \leq 15'000)$$

a) Bestimmen Sie die Kostenfunktion und die Gewinnfunktion. (5)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Kostenfunktion</i> $m = \frac{488'000 - 272'000}{8'000 - 2'000} = 36$ $q = 488'000 - 36 \cdot 8'000 = 200'000$ $y_K = 36x + 200'000$		3
<i>Gewinn:</i> $y_G = y_E - y_K = -0.0064x^2 + 96x - 200'000$		2
<i>Abzüge:</i>		

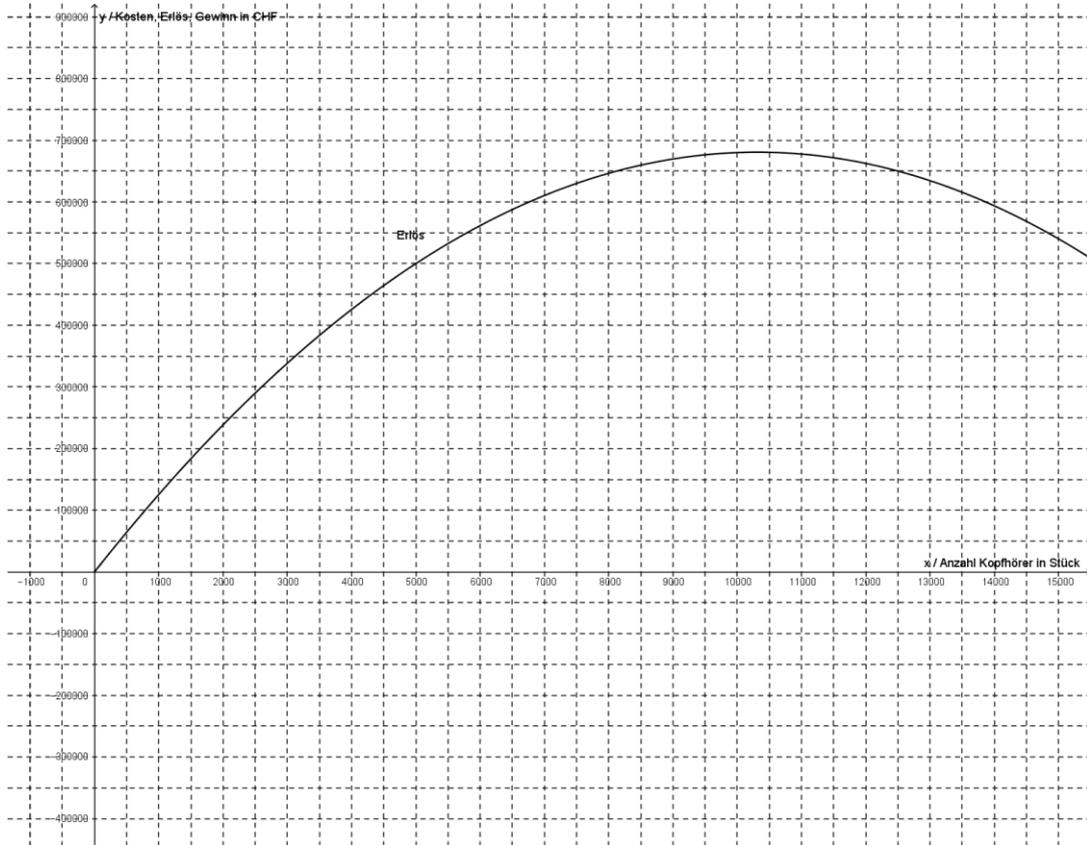
b) In welchem Produktionsbereich wird ein Gewinn erzielt? Berechnen Sie die Werte. (3)

Lösungsdetails		Punkte
<i>Gewinn:</i> $y_G = 0 = -0.0064x^2 + 96x - 200'000$		1
$x_1 = 2'500$		1
$x_2 = 12'500$		1
<i>Zwischen 2'500 und 12'500 Stück wird ein Gewinn erzielt.</i>		
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1

c) Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn maximal und wie gross ist dieser? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$x_{Max} = 7500$		1
$y_{Max} = 160000$		1
<i>Bei 7'500 Stück wird ein maximaler Gewinn von CHF 160'000.00 erzielt.</i>		
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1

d) Ergänzen Sie das untenstehende Diagramm mit der Kosten- und Gewinnfunktion. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung des Diagramms. (5)

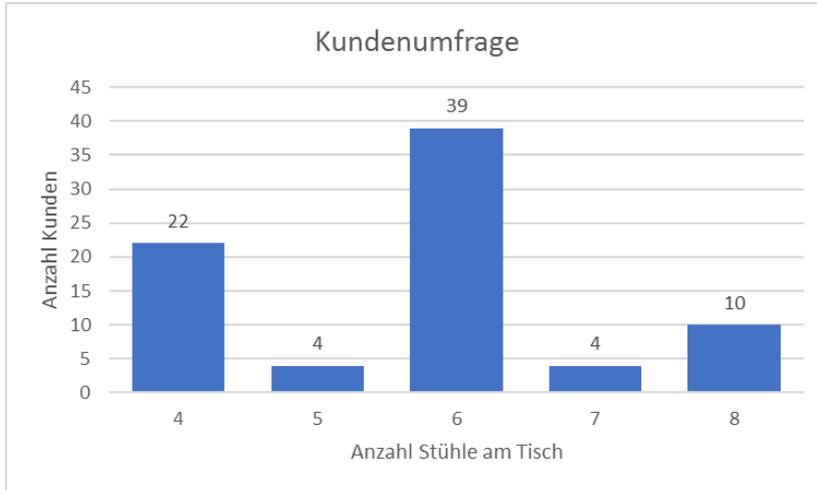


Lösungsdetails		Punkte
		<p><i>Kosten 2</i> <i>Gewinn 3</i></p>
Abzüge:	Fehlende Beschriftungen	Max. -2

Aufgabe 8

10 Punkte

Ein Möbelcenter befragt 79 seiner Kunden, wie viele Stühle an ihrem Esstisch stehen. Das untenstehende Diagramm zeigt die Ergebnisse.



a) Ermitteln Sie die folgenden Werte und füllen Sie die untenstehende Tabelle aus. (8)

Modus	
Median	
Mittelwert	
Spannweite	
1. Quartil	
3. Quartil	
Interquartilsdifferenz	

Lösungsdetails		Punkte
<i>Modus:</i>	6	1
<i>Median:</i>	6	1
<i>Mittelwert:</i>	5.696	2
<i>Spannweite:</i>	4	1
<i>1. Quartil:</i>	4	1
<i>3. Quartil:</i>	6	1
<i>IQR:</i>	2	1
<i>Abzüge:</i>		

b) Wie viele Prozent der Kunden haben höchstens 6 Stühle am Tisch? (ganze Prozente) (2)

Lösungsdetails		Punkte
<i>82 % der Kunden haben höchstens 6 Stühle am Tisch.</i>		2
<i>Abzüge:</i>	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1

Aufgabe 9

9 Punkte

Vereinfachen Sie die Aufgaben soweit wie möglich.

a) $\frac{2a(a+1)-(a^2-1)}{(a+1)(a-1)}$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{2a(a+1)-(a^2-1)}{(a+1)(a-1)} = \frac{2a^2+2a-a^2+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{a^2+2a+1}{(a+1)(a-1)} = \frac{(a+1)^2}{(a+1)(a-1)} = \frac{(a+1)}{(a-1)}$		3
Abzüge:	Aus Summe kürzen	0 Pte

b) $\frac{\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[4]{a^{-5}}}{\sqrt[12]{a^{-5}} \cdot (\sqrt{a})^3}$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{\sqrt{a \cdot \sqrt[3]{a^5}} \cdot \sqrt[4]{a^{-5}}}{\sqrt[12]{a^{-5}} \cdot (\sqrt{a})^3} = \frac{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{5}{6}} \cdot a^{-\frac{5}{4}}}{a^{-\frac{5}{12}} \cdot a^{\frac{3}{2}}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{5}{6} - \frac{5}{4} - (-\frac{5}{12}) - \frac{3}{2}} = a^{\frac{6+10-15+5-18}{12}} = a^{-1} \text{ oder } \frac{1}{a}$		3
Abzüge:	Pro Fehler	-1

c) $\log_a(9) + 3 \cdot \log_a(a) - 2 \cdot \log_a(3a^2)$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\log_a\left(\frac{9 \cdot a^3}{9 \cdot a^4}\right) = \log_a(a^{-1}) = -1$		3
Abzüge:		