Mathematik

Serie A - Lösungen

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
1. Fehler: Abzug von 50% der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrundeliegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom November 2016, KKB Kanton Zürich.

Aufgabe 1

14 Punkte

a) Die Tageseinnahmen eines Kinderzirkus betrugen CHF 1'525.00. Eine Eintrittskarte für Erwachsene kostet CHF 8.50, eine für Kinder CHF 5.50. Wie viele Erwachsene und Kinder besuchten den Zirkus, wenn insgesamt 250 Besucher gezählt wurden? (7)

Lösungsdetails		**Punkte**
x: Anz. Erwachsene, y: Anz. Kinder		
$x + y = 250$		*2*
$8.5x + 5.5y = 1'525$		*2*
x = 50, y = 200		*Var. 1: 2* *Var. 2: 1*
50 Erwachsene und 200 Kinder besuchten den Zirkus.		
Abzüge:	*Fehlende Variablendefinition*	*-1*
	Fehlender Antwortsatz	*-1*

b) Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge des folgenden Gleichungssystems. $(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ (7)

(1) $\frac{3}{x-2} - \frac{1}{y+3} = 0$

(2) $\frac{1}{x-2} + \frac{2}{2y+6} = 2$

Lösungsdetails		**Punkte**
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}\backslash\{2\},\ \mathbb{D}_y = \mathbb{R}\backslash\{-3\}$		*2*
Erste Variable		*3*
Zweite Variable		*2*
$x = 4;\ y = \frac{-7}{3}$		
$\mathbb{L} = \{(4/-\frac{7}{3})\}$		
Abzüge:	*Lösungsmenge nicht korrekt oder fehlend*	*-1*

Aufgabe 2

14 Punkte

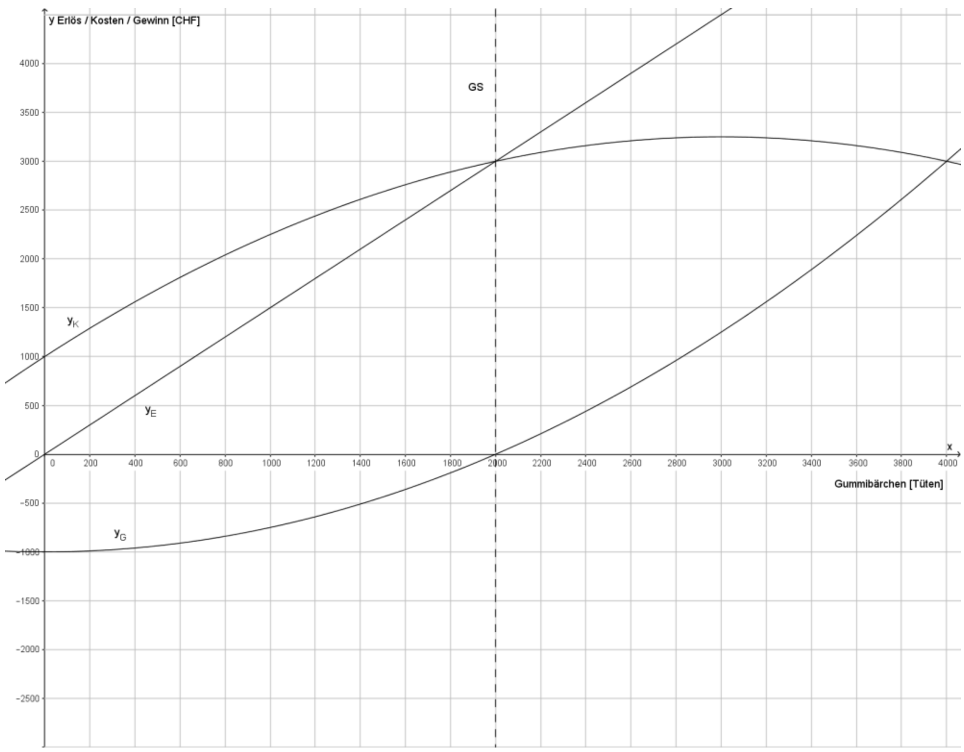
Eine Firma produziert Päckchen mit Gummibärchen. Die Gesamtkosten in Abhängigkeit der Anzahl Päckchen können mit der Funktion $y_K = -0.00025x^2 + 1.5x + 1'000$ beschrieben werden. Der Gültigkeitsbereich der Funktion liegt zwischen 0 und 3000 Päckchen.

Ein Päckchen wird für CHF 1.50 verkauft.

a) Bestimmen Sie die Erlös- und Gewinnfunktion. Berechnen Sie ebenfalls die Gewinnschwelle. (6)

Lösungsdetails	**Punkte**
Erlös: $y_E = 1.5x$	*1*
Gewinn: $y_G = 0.00025x^2 - 1'000$	*2*
$y_E = y_K$ *oder* $y_G = 0$	*1*
Gewinnschwelle: $0 = 0.00025x^2 - 1'000 \quad x = 2'000$	*2*
Die Gewinnschwelle wird bei 2'000 Päckchen Gummibärchen erreicht.	
Abzüge: *Fehlender Antwortsatz*	*-1*

b) Ergänzen Sie das untenstehende Diagramm mit der Erlös- und Gewinnfunktion und bezeichnen Sie die Gewinnschwelle. Achten Sie auf eine vollständige Beschriftung des Diagramms. (5)

Lösungsdetails	**Punkte**
	*E: 1* *G: 3* *GS: 1*
Abzüge: *Fehlende oder unvollständige Geradenbeschriftung*	*-1*

c) Wie viele Päckchen Gummibärchen müssen mindestens produziert und verkauft werden, damit ein Minimalgewinn von CHF 500.00 erwirtschaftet wird? (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
Gewinn: $500 = 0.00025 \cdot x^2 - 1'000$		*1*
$x = 2'449.49$		*1*
Mindestens 2'450 Päckchen		*1*
Es müssen mindestens 2'450 Päckchen produziert und verkauft werden.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 3

11 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und Lösungsmengen der folgenden Gleichungen ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).

a) $\sqrt{8x+1} + 5 = 2x$ (7)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -\frac{1}{8}\right\}$		*1*
$\sqrt{8x+1} = 2x - 5$ $8x + 1 = 4x^2 - 20x + 25$ $4x^2 - 28x + 24 = 0$ $x^2 - 7x + 6 = 0$		*2*
$(x-6)(x-1) = 0$ ➔ $x_1 = 1,\ x_2 = 6$ ➔		*2*
prf. ➔ $\mathbb{L} = \{6\}$		*2*
Abzüge:	*Wenn $\mathbb{L} = \{\}$ **keine** Punkte für die Kontrolle*	

b) $3^{x-2} = 27^{2-x}$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$		*1*
$3^{x-2} = 3^{6-3x}$ *(oder logarithmieren)*		*1*
$x - 2 = 6 - 3x$		*1*
$4x = 8$		
$x = 2$		*1*
$\mathbb{L} = \{2\}$		
Abzüge:	*Fehlende Lösungsmenge*	*-1*

Aufgabe 4

18 Punkte

Ein Bauer möchte aus Äpfeln und Birnen Süssmost pressen. Er muss mindestens 150 kg Äpfel und kann höchstens 180 kg Birnen verarbeiten. Er benötigt mindestens 320 Liter Süssmost, wobei pro 100 kg Obst 80 Liter Saft gepresst werden können. Damit der Most bekömmlich ist, soll er mindestens so viele Äpfel wie Birnen enthalten, maximal jedoch 50% mehr Äpfel als Birnen.

Das Pressen von 100 kg Äpfeln kostet den Bauern CHF 120.00, für 100 kg Birnen beträgt sein Aufwand CHF 180.00.

a) Erstellen Sie das lineare Programm (x = Menge Äpfel in kg, y = Menge Birnen in kg) und formulieren Sie die Zielfunktion für die minimalen Kosten. **Ohne Grafik!** (7)

Lösungsdetails		**Punkte**
(1)	$x \geq 150$	*1*
(2)	$y \leq 180$	*1*
(3)	$x + y \geq 400$	*1*
(4)	$y \leq x$	*1*
(5)	$x \leq 1.5y$	*1*
(z)	$z = 1.2x + 1.8y$	*2*
Abzüge:		

b1) Ein Jahr später hat er auf das Kaufverhalten reagiert und seine Produktionsdaten angepasst. Das neue lineare Programm lautet nun: (8)

(1) $x \leq 240$

(2) $y \leq 360$

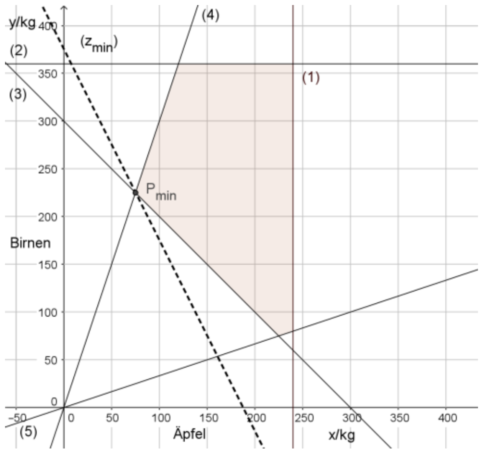
(3) $x + y \geq 300$

(4) $y \leq 3x$

(5) $x \leq 3y$

(z) $z = 1.6x + 0.8y$

Erstellen Sie ein entsprechendes Planungspolygon mit Zielfunktion für die minimalen Kosten.

Lösungsdetails		**Punkte**
		*Je Gerade 1* *Polygon 1* *z' 1* z_{min} *&* P_{min} *1*
Abzüge:	*Fehlende Beschriftungen (Achsen, Punkte, Gerade)*	*-1, max. -3*

b2) Berechnen Sie, wie viele Kilogramm der Bauer von jeder Obstsorte pressen muss, um die Kosten minimal zu halten. (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
P_{min}: *(3) geschnitten mit (4)*		
⇨ $-x + 300 = 3x$		*1*
⇨ $x = 75 \rightarrow y = 225$		*2*
⇨ *Er muss 75 kg Äpfel und 225 kg Birnen pressen.*		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 5

8 Punkte

a) Ein KMU hat im Jahr 2009 sämtliche Büros für CHF 225‘000.00 neu möbliert. In der Steuererklärung für das Jahr 2015 beträgt der Buchwert des Mobiliars noch CHF 40‘045.00. Zu welchem Abschreibungssatz in % wird das Büromobiliar abgeschrieben? (4)

Lösungsdetails		Punkte
$40'045 = 225'000 \cdot q_A{}^7$		*1*
$q_A = 0.78146$		*2*
$p = 21.8535$		*1*
Der Abschreibungssatz von Büromobiliar beträgt 21.85 %.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

b) Firmenautos werden steuerlich in der Regel mit 40% degressiv abgeschrieben. In einer Firma werden die Wagen ersetzt, wenn ihr Wert unter einen Zehntel des Anschaffungspreises gesunken ist. Wie lange werden die Firmenautos, auf ganze Jahre gerundet, durchschnittlich gefahren? (4)

Lösungsdetails		Punkte
$\frac{1}{10} = 1 \cdot 0.6^n$		*2*
$n \approx 4.51$		*2*
Die Wagen werden durchschnittlich 5 Jahre lang gefahren.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 6

3 Punkte

Silvan möchte ein Auto kaufen, kann es sich jedoch nicht leisten. Seine Eltern springen ein. Sie kaufen anfangs Jahr das Auto für CHF 45‘000.00. Silvan möchte das Auto in 3 Jahren abbezahlt haben. Welchen Betrag muss er jeweils Ende Jahr zahlen, wenn die Eltern mit einem Zinssatz von 3.5% rechnen? Runden Sie den Betrag auf 5 Rappen.

Lösungsdetails		Punkte
$r = K_0 \cdot \frac{q^n \cdot (q-1)}{q^n - 1} = 45'000 \cdot \frac{1.035^3 \cdot (1.035 - 1)}{1.035^3 - 1} = 16'062.038$		*3*
Silvan muss jedes Jahr CHF 16‘062.05 bezahlen.		
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*
	Fehlerhaft gerundet	*-1*

Aufgabe 7

12 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{a^2+a-6}{a^2-4} : \left(\frac{2}{a+1} - \frac{1}{a+2}\right)$ (5)

Lösungsdetails	Punkte
$\frac{(a+3)(a-2)}{(a+2)(a-2)} : \frac{2(a+2)-1(a+1)}{(a+1)(a+2)}$	*2*
$= \frac{a+3}{a+2} \cdot \frac{(a+1)(a+2)}{a+3}$	*2*
$= a+1$	*1*
Abzüge:	

b) $\left(\frac{b}{\sqrt{a}}\right)^{-2} \cdot \sqrt[3]{\frac{b^2 \cdot \sqrt{b^8}}{a^6}}$ (4)

Lösungsdetails	Punkte
$= b^{-2}a \cdot b^{\frac{2}{3}}b^{\frac{4}{3}}a^{-2}$	*3*
$= \frac{1}{a}$	*1*
Abzüge:	

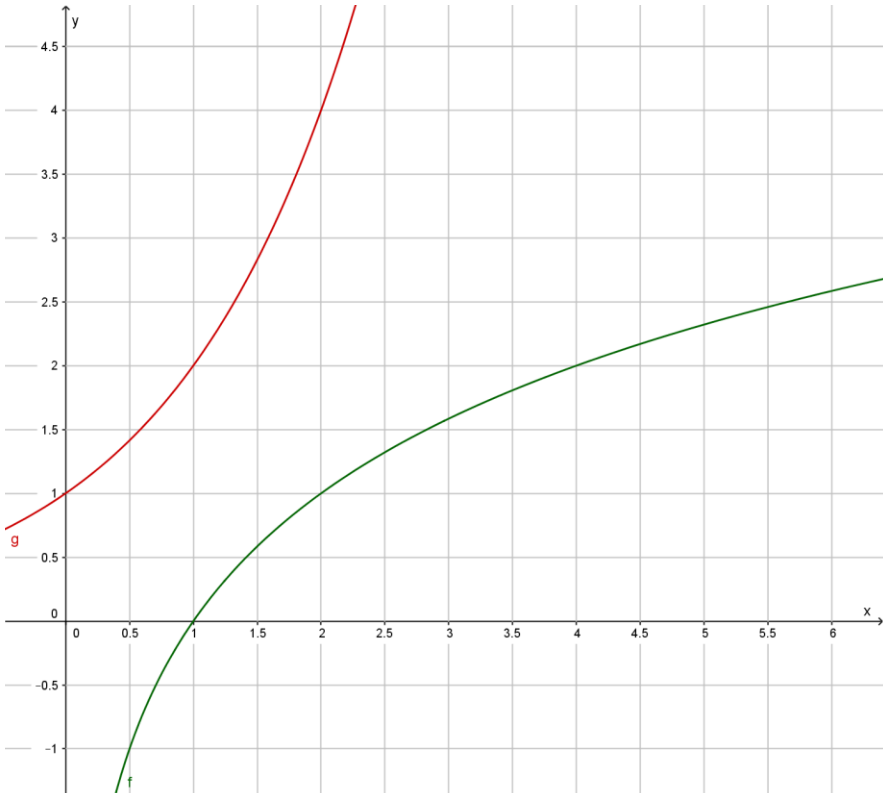
c) $log_a(28a) + log_a\left(\frac{a}{2}\right) - log_a\left(\frac{14}{a}\right)$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$log_a\left(\frac{28a \cdot a \cdot a}{2 \cdot 14}\right) = log_a(a^3)$	*2*
$= 3$	*1*
Abzüge:	

Aufgabe 8

8 Punkte

a) Zeichnen Sie die Funktion f: $y = log_2(x)$ ins vorgegebene Koordinatensystem ein. (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
		*3*
Abzüge:		

b) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion. (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$y = 2^x$		*2*
Abzüge:		

c) Zeichnen Sie die Umkehrfunktion ebenfalls ins Diagramm ein. (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
In der Grafik: Umkehrfunktion $f^{-1} = g$		*3*
Abzüge:		

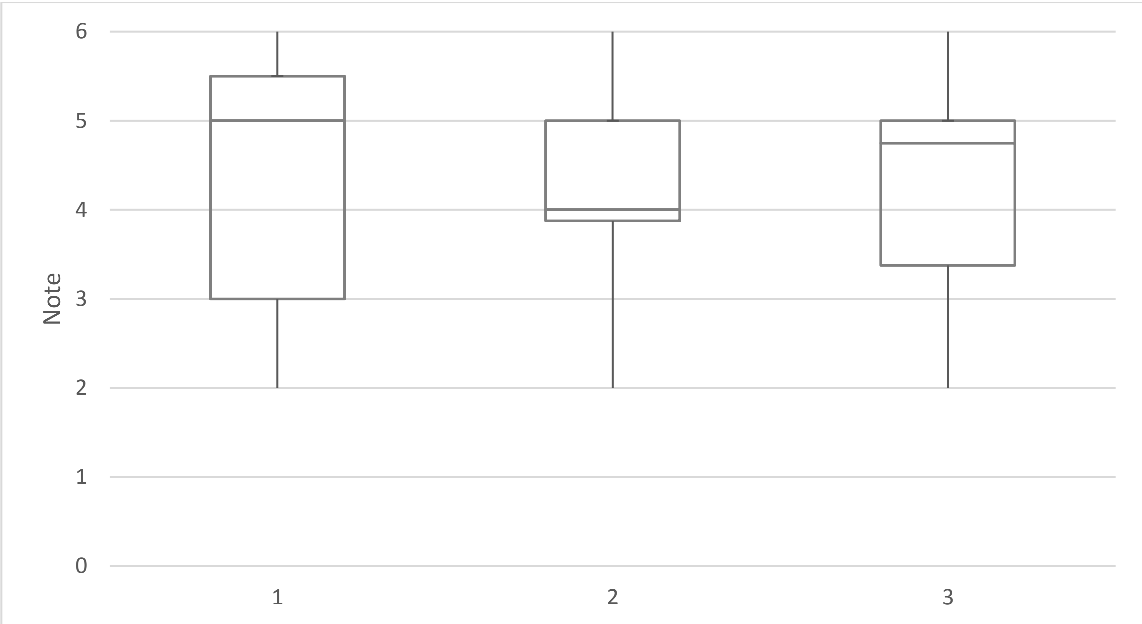
Aufgabe 9

12 Punkte

Die Auswertung der Abschluss-Prüfung von drei Klassen ergab Folgendes:

	A	B	C
Mittelwert	4.25	4.25	4.25
Median	5	4	4.75
Min	2	2	2
Max	6	6	6
Standardabweichung	1.452	1.073	1.335
1. Quartil (Q1)	3	3.875	3.375
3. Quartil (Q3)	5.5	5	5

a) Ordnen Sie die Boxplots den entsprechenden Klassen zu: (3)



Lösungsdetails		**Punkte**
1=> Klasse A		*1*
2=>Klasse B		*1*
3=> Klasse C		*1*
Abzüge:		

b) Zu welcher Abschluss-Klasse sind die Aussagen zutreffend? Geben Sie für jede Aussage an, ob sie richtig (R) oder falsch (F) ist. (9)

Lösungsdetails				**Punkte**
Pro 2 richtig ausgefüllte Felder				*1*
	A	***B***	***C***	
50 % der Noten lagen zwischen 3 und 5.5.	*R*	*F*	*F*	
Ein Viertel der Lernenden erreichte mindestens die Note 5.	*F*	*R*	*R*	
Die Spannweite betrug 4 Noten.	*R*	*R*	*R*	
Die Hälfte der Lernenden erreichte mindestens die Note 5.	*R*	*F*	*F*	
Die Mehrheit der Lernenden hat eine Note, die tiefer als 4.25 ist.	*F*	*R*	*F*	
Die Verteilung der Noten ist rechtsschief.	*F*	*R*	*F*	
Abzüge:				