

Mathematik

Serie A - Lösungen

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:

1. Fehler: Abzug von 50 % der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts

2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung“ vom Juni 2023, KKB Kanton Zürich.

Dieser Lösungs- und Bewertungsschlüssel darf nur von Mathematik-Lehrenden kaufmännischer Berufsschulen verwendet werden. Insbesondere darf er in späteren Jahren im Unterricht zu Übungszwecken nicht 1:1 kopiert und an Lernende abgegeben werden. Jede weitere Verwendung der Originalprüfung wie auch dieses Schlüssels bedarf der Bewilligung der Kommission Kaufmännische Berufsmatura, Kt. ZH. Kommerzielle Verwendung - auch nur auszugsweise - bleibt untersagt.

Notenskala

Punkte	0 – 4	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94	95 – 100
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

Aufgabe 1

7 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgendes Gleichungssystem.

($\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$)

$$(1) \quad \frac{1}{2x-1} - \frac{2}{y-2} = 1$$

$$(2) \quad \frac{3}{2x-1} - \frac{3}{y-2} = 2$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R} \setminus \{0.5\} \quad \mathbb{D}_y = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ oder $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0.5\} \times \mathbb{R} \setminus \{2\}$		1, 1
$\frac{-6}{y-2} + \frac{3}{y-2} = 3 - 2$		1
$y = -1$		2
$x = 2$		2
$\mathbb{L} = \{(2; -1)\}$		
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1

Aufgabe 2

6 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgende Gleichung ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$).

$$\frac{x}{2x-4} = \frac{1}{3x} + \frac{1}{x-2}$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$ $\frac{x}{2(x-2)} = \frac{1}{3x} + \frac{1}{x-2}$		1
$3x^2 = 2(x-2) + 6x$ $3x^2 - 8x + 4 = 0$		2
$x_1 = \frac{2}{3} \quad x_2 = 2$		1, 1
$\mathbb{L} = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$		1
Hinweis:	Führt eine falsche Umformung auf eine lineare Gleichung, Maximalpunktzahl 3	

Aufgabe 3

14 Punkte

Ein Betrieb stellt Uhren her. Die Fixkosten belaufen sich auf CHF 7'800.00, die Stückkosten pro Uhr betragen CHF 480.00. Die Kostenfunktion ist linear.

Da der Verkaufspreis direkt von der Nachfrage abhängt, verhält sich die Erlösfunktion wie folgt:

$$y_E = -2x^2 + 800x \quad x = \text{Anzahl Uhren in Stück } (\mathbb{D} = \mathbb{N}_0), y_E = \text{Erlös in CHF}$$

a) Bestimmen Sie die Kosten- und Gewinnfunktion. (4)

Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Menge der Uhren in Stück}$ $y = \text{Kosten, Gewinn in CHF}$ Kostenfunktion: $y_K = 480x + 7'800$ Gewinnfunktion: $y_G = y_E - y_K = -2x^2 + 800x - (480x + 7'800)$ $y_G = -2x^2 + 320x - 7'800$		2
		2
Abzüge:		

b) In welchem Stückzahlenbereich kann mit einem Gewinn gerechnet werden? (2)

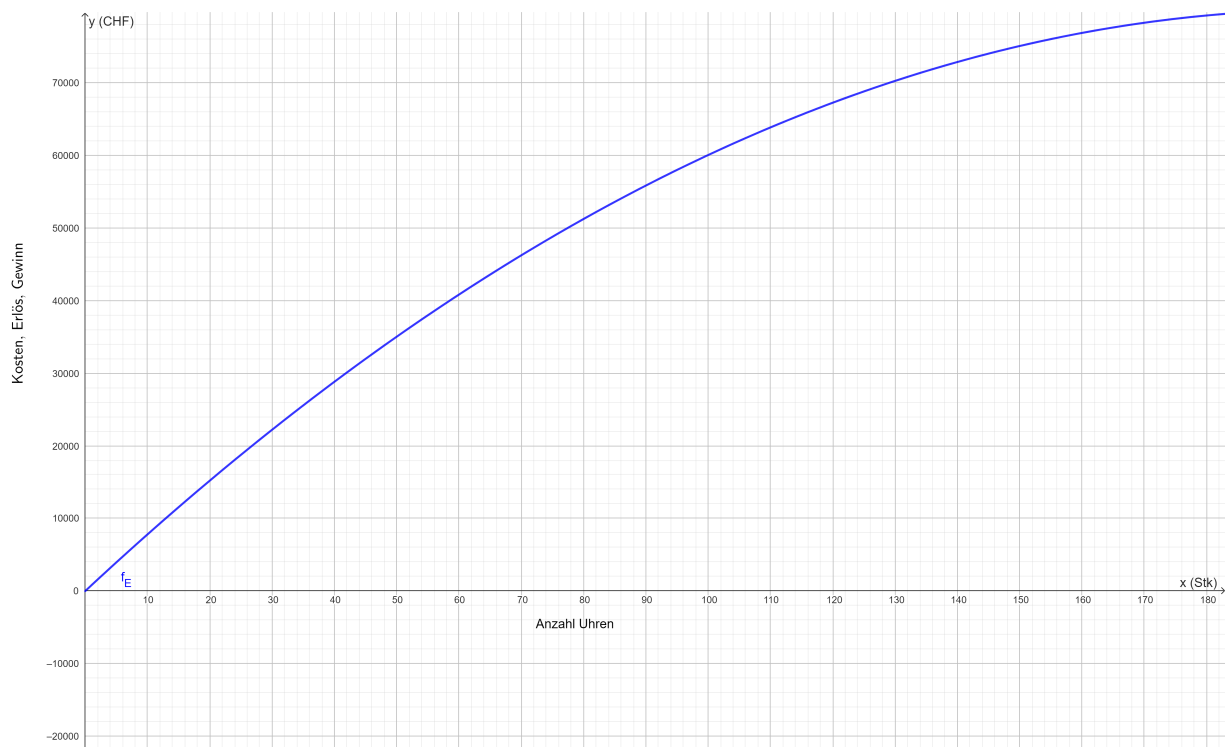
Lösungsdetails		Punkte
$0 = -2x^2 + 320x - 7'800$ $x_1, x_2 = \frac{-320 \pm \sqrt{320^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (-7'800)}}{2 \cdot (-2)}$ $x_1 = 30$ $x_2 = 130$ <i>Zwischen 30 Stück und 130 Stück wird ein Gewinn erzielt.</i>		2
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

c) Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn maximal und wie gross ist dieser? (2)

Lösungsdetails		Punkte
$S_x = \frac{x_1 + x_2}{2} = 80$ $S_y = (-2) \cdot 80^2 + 320 \cdot 80 - 7'800 = 5'000$ <i>Der Gewinn ist bei 80 Stück am grössten. Er beträgt maximal CHF 5'000.00.</i>		2
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

d) Ergänzen Sie folgendes Diagramm mit der Kosten- und Gewinnfunktion (inklusive Gewinnschwellen und maximalem Gewinn).

(6)



Lösungsdetails	Punkte
	$y_K: 2$ $y_G: 2$ $GS: 1$ $S: 1$
Abzüge: <i>Fehlende Beschriftungen</i>	Max. -1

Aufgabe 4

18 Punkte

Ein Buchhändler möchte in der nächsten Saison Romane (x) und Sachbücher (y) anbieten. Er möchte mindestens 80 Romane, aber insgesamt maximal 300 Bücher in seinem Sortiment führen. Die Anzahl Romane darf maximal das Dreifache der Sachbücher betragen. Der Verkaufspreis liegt bei CHF 20.00 für Romane und CHF 35.00 für Sachbücher. Der Umsatz muss mindestens CHF 6'200.00 betragen. Aufgrund beschränkter Ausstellungsmöglichkeiten der Bücher im Laden können entweder höchstens 380 Romane oder 240 Sachbücher oder eine entsprechende lineare Kombination ausgestellt werden.

Der Einkaufspreis beträgt für Romane CHF 12.00 und für Sachbücher CHF 25.00.

- a) Bestimmen Sie die Einkaufsbedingungen und die Zielfunktion für einen maximalen Gewinn. (6)

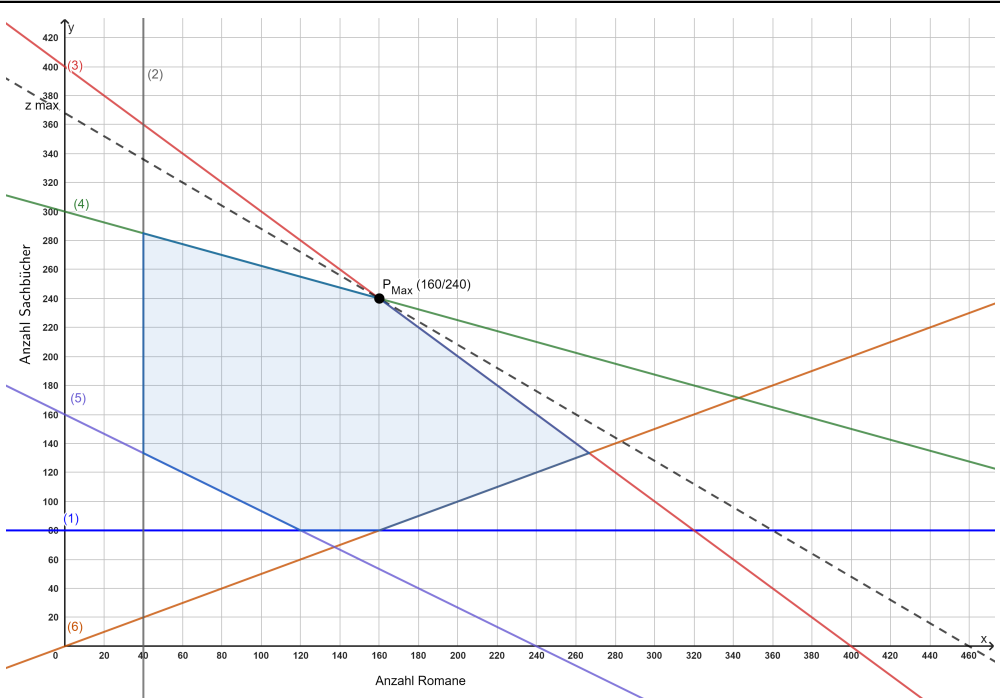
Lösungsdetails		Punkte
$x = \text{Anzahl Romane in Stk.}$ $y = \text{Anzahl Sachbücher in Stk.}$ $z = \text{Gewinn in CHF}$ $(x \geq 0, y \geq 0)$ (1) $x \geq 80$ (2) $x + y \leq 300$ (3) $x \leq 3y$ (4) $20x + 35y \geq 6200$ (5) $\frac{x}{380} + \frac{y}{240} \leq 1$ (6) $z = 8x + 10y$		Je 1
Abzüge:		

- b) Durch einen Umbau im Lager und im Laden haben sich die Einkaufsbedingungen wie folgt geändert.

- (1) $y \geq 80$
 (2) $x \geq 40$
 (3) $y \leq -x + 400$
 (4) $y \leq -\frac{3}{8}x + 300$
 (5) $y \geq -\frac{2}{3}x + 160$
 (6) $\frac{1}{2}x \leq y$
 (z) $z = 16x + 20y$

Zeichnen Sie das lineare Programm und die Zielfunktion in das vorgegebene Koordinatensystem ein.

(9)

Lösungsdetails		Punkte
		(9) Pro Gerade 1P Lösungspolygon 1P z' oder z_{Max} 1P P_{Max} 1P
Abzüge:	Fehlende Beschriftungen (Geraden)	max. -2

c) Berechnen Sie, wie viele Romane und Sachbücher eingekauft werden, damit der Gewinn maximal ausfällt.

(2)

Lösungsdetails		Punkte
(3) = (4) $-x + 400 = -0.375x + 300$ $x = 160, y = 240$ Es müssen 160 Romane und 240 Sachbücher verkauft werden, um den maximalen Gewinn zu erreichen		1, 1
Abzüge:	Wird der Punkt abgelesen Fehlender Antwortsatz	-1 -1

d) Wie gross ist der maximale Gewinn?

(1)

Lösungsdetails		Punkte
$z = 16 \cdot (160) + 20 \cdot (240) = 7'360$ Der maximale Gewinn beträgt CHF 7'360.00		1
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

Aufgabe 5

13 Punkte

- a) Ein Vermieter möchte seine Wohnmobile in fünf Jahren auf einen Sechstel des Anschaffungspreises degressiv abschreiben. Wie gross muss der Abschreibungssatz in Prozenten (auf zwei Dezimalstellen) gewählt werden? (3)

Lösungsdetails		Punkte
$q = \sqrt[5]{\frac{1}{6}} \approx 0.69883$ $p \approx 0.30117$ Es muss ein Abschreibungssatz von 30.12 % gewählt werden.		2
		1
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1
	Falsche oder zu frühe Rundung	-1

- b) Ein Kapital von CHF 30'000.00 wird zu 1.65 % verzinst. Wie viele ganze Jahre dauert es, bis das Kapital erstmals über CHF 43'000.00 angewachsen ist? (3)

Lösungsdetails		Punkte
$30'000 \cdot 1.0165^x = 43'000$ $x = \frac{\log 43'000 - \log 30'000}{\log 1.0165}$ $x \approx 21.998$ Es dauert 22 Jahre.		1
		1
		1
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1
	Fehlende oder nicht korrekte Rundung	-1

- c) Ein Kapital von CHF 120'000.00 wird angelegt. Nach 19 Jahren werden CHF 30'000.00 hinzugefügt und nach einem weiteren Jahr werden CHF 20'000.00 abgehoben. Der Zinssatz beträgt 4 %. Wie hoch ist der Kontostand nach insgesamt 25 Jahren? (Runden Sie auf ganze Franken) (3)

Lösungsdetails		Punkte
$K_n = 120'000 \cdot 1.04^{25} + 30'000 \cdot 1.04^6 - 20'000 \cdot 1.04^5$ $K_n \approx 333'526.872$ Der Kontostand nach 25 Jahren beträgt CHF 333'527.00		2
		1
Abzüge:	Fehlender Antwortsatz	-1

- d) Fabio möchte ein Auto für CHF 42'000.00 kaufen. Er kann davon CHF 10'000.00 direkt bezahlen. Den Restbetrag bezahlen seine Eltern. Wie viel muss er seinen Eltern jeweils Ende Jahr zurückzahlen, damit er das Auto in 4 Jahren abbezahlt hat? Die Eltern rechnen mit einem Zinssatz von 1.5 %. (Runden Sie den Betrag auf ganze Franken) (4)

Lösungsdetails		Punkte
$32'000 \cdot 1.015^4 = r \cdot \frac{1.015^4 - 1}{0.015}$		2
$\frac{32'000 \cdot 1.015^4 \cdot 0.015}{1.015^4 - 1} = r$		1
$r \approx 8'302.23$		1
<i>Fabio muss jährlich CHF 8'302.00 abzahlen.</i>		
Abzüge:	<i>Fehlender Antwortsatz</i>	-1
	<i>Falsche oder fehlende Rundung (sowohl 8'302.00 als auch 8'303.00 sind gültig)</i>	-1

Aufgabe 6

12 Punkte

Eine Geschwindigkeitsmessung innerorts ergab folgende Messwerte in km/h:

38 / 42 / 45 / 46 / 46 / 49 / 50 / 50 / 50 / 51 / 53 / 54 / 56 / 58 / 61 / 67

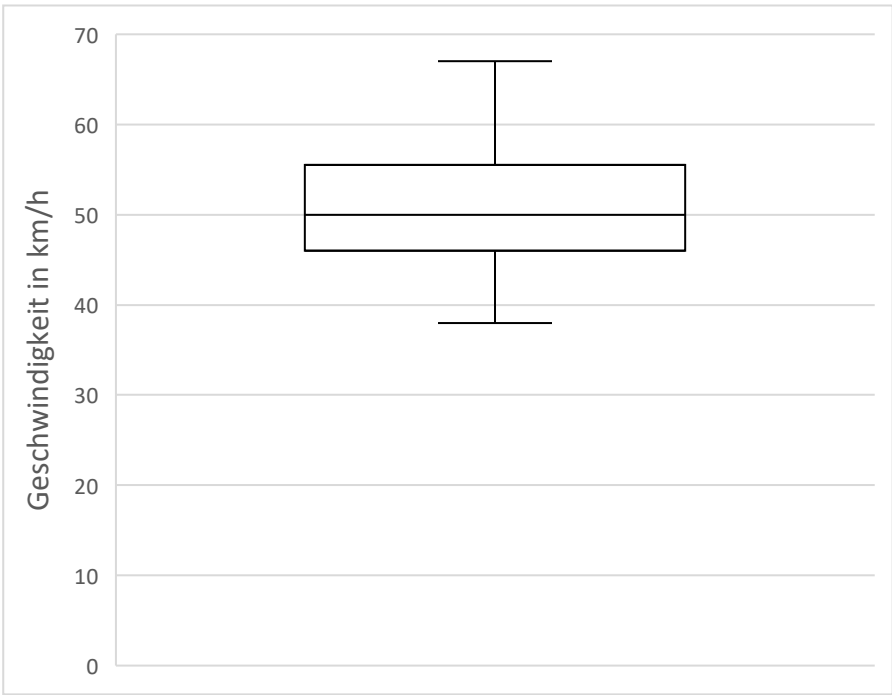
a) Ermitteln Sie die folgenden Werte und tragen Sie diese in die Tabelle ein. (7)

Mittelwert	
Median	
Modus	
Spannweite	
1. Quartil	
3. Quartil	
Interquartilsabstand	

Lösungsdetails		Punkte
<i>Mittelwert</i>	<i>51</i>	<i>1</i>
<i>Median</i>	<i>50</i>	<i>1</i>
<i>Modus</i>	<i>50</i>	<i>1</i>
<i>Spannweite</i>	<i>29</i>	<i>1</i>
<i>1. Quartil</i>	<i>46</i>	<i>1</i>
<i>3. Quartil</i>	<i>55.5</i>	<i>1</i>
<i>Interquartilabstand</i>	<i>9.5</i>	<i>1</i>
<i>Abzüge:</i>		

b) Erstellen Sie den entsprechenden Boxplot.

(3)

Lösungsdetails		Punkte
		3
Abzüge:		

c) Wie viele Autos fuhren schneller als 50 km/h? Bestimmen Sie die absolute und relative Häufigkeit.

(2)

Lösungsdetails		Punkte
Abs. Häufigkeit: 7 => 7 Autos waren schneller als 50km/h.		1
Die relative Häufigkeit beträgt dabei 43.75 %.		1
Abzüge:		

Aufgabe 7

13 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmengen für folgende Gleichungen. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

a) $\sqrt{16 - x} = x - 4$ (6)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{R} x \leq 16\}$		1
$16 - x = x^2 - 8x + 16$		2
$x^2 - 7x = 0$		
$x_1 = 0$		1
$x_2 = 7$		1
$\mathbb{L} = \{7\}$		1
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1
	Falsche Quadrierung	-2

b) $2 \cdot 4^x = 8^{x-1}$ (4)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}$		1
$2^{1+2x} = 2^{3(x-1)}$		1
$1 + 2x = 3x - 3$		1
$4 = x$		1
$\mathbb{L} = \{4\}$		
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1
	Basis multipliziert	-2

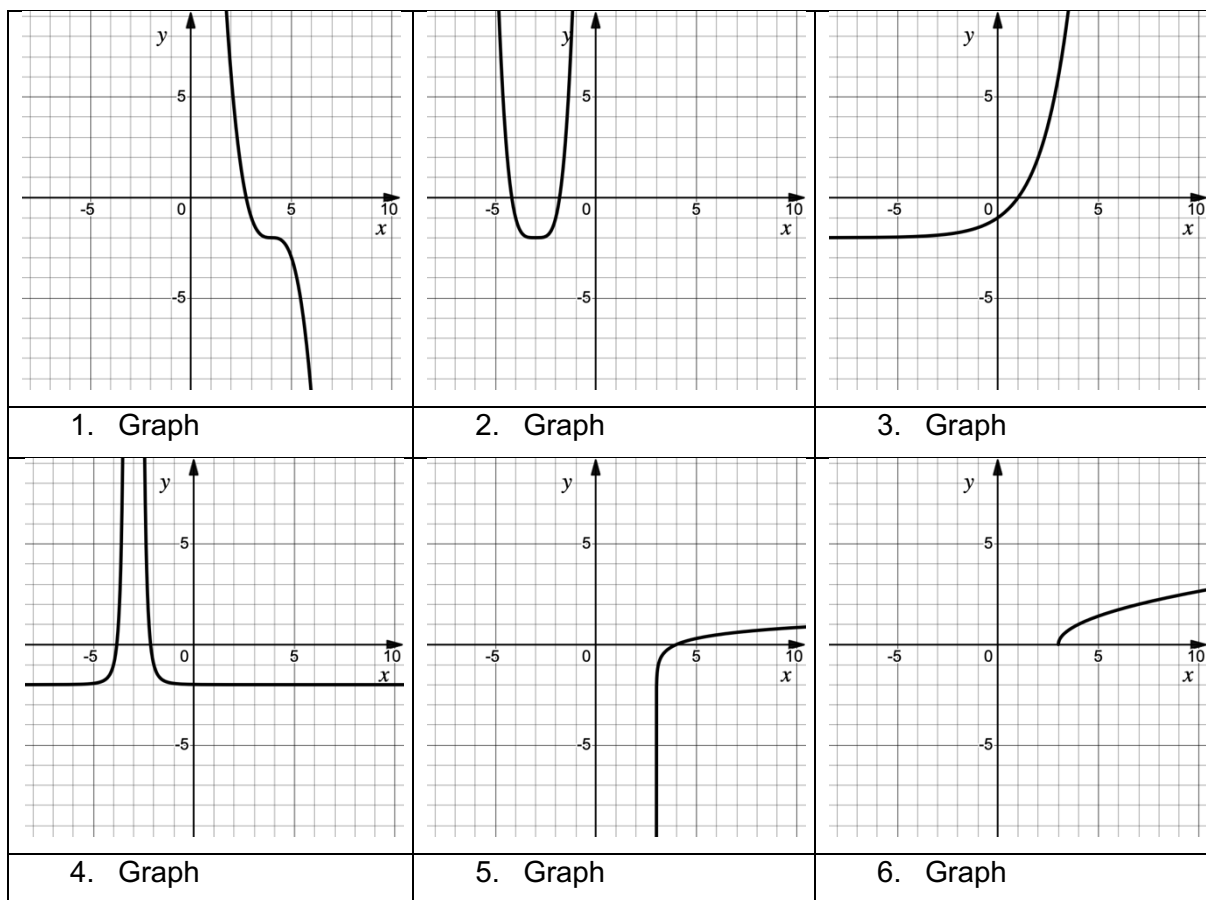
c) $\log_3(9x) = 4$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$		1
$3^4 = 9x$		1
$9 = x$		1
$\mathbb{L} = \{9\}$		
Abzüge:	Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge	-1

Aufgabe 8

6 Punkte

Gegeben sind folgende Graphen und Funktionsgleichungen:



A: $y = (x - 4)^3 - 2$

B: $y = (x + 3)^{-4} - 2$

C: $y = (x - 3)^4 - 2$

D: $y = 2^x - 2$

E: $y = -(x - 4)^3 - 2$

F: $y = \log(x - 3)$

G: $y = \sqrt{x - 3}$

H: $y = (x + 3)^4 - 2$

Ordnen Sie jeweils die korrekte Funktionsgleichung dem entsprechenden Graphen zu.
Tragen Sie den entsprechenden Grossbuchstaben in die Tabelle ein.

Graphen	Funktionsgleichungen
1. Graph	
2. Graph	
3. Graph	
4. Graph	
5. Graph	
6. Graph	

Lösungsdetails		Punkte														
<table><tr><th>Graphen</th><th>Funktionsgleichungen</th></tr><tr><td>1. Graph</td><td>E</td></tr><tr><td>2. Graph</td><td>H</td></tr><tr><td>3. Graph</td><td>D</td></tr><tr><td>4. Graph</td><td>B</td></tr><tr><td>5. Graph</td><td>F</td></tr><tr><td>6. Graph</td><td>G</td></tr></table>		Graphen	Funktionsgleichungen	1. Graph	E	2. Graph	H	3. Graph	D	4. Graph	B	5. Graph	F	6. Graph	G	<i>Je 1 Pkt.</i>
Graphen	Funktionsgleichungen															
1. Graph	E															
2. Graph	H															
3. Graph	D															
4. Graph	B															
5. Graph	F															
6. Graph	G															
<i>Abzüge:</i>																

Aufgabe 9

11 Punkte

Vereinfachen Sie folgende Terme so weit wie möglich.

a)
$$\frac{\frac{ab}{a^2 - b^2}}{\frac{4ab}{(2a + 2b)^2}} \quad (4)$$

Lösungsdetails		Punkte
$= \frac{ab}{(a-b)(a+b)} : \frac{4ab}{4(a+b)(a+b)}$		2
$= \frac{ab}{(a-b)(a+b)} \cdot \frac{4(a+b)(a+b)}{4ab}$		1
$= \frac{a+b}{a-b}$		1
Abzüge:	Pro Fehler	-1

b)
$$\frac{\sqrt[3]{a^4 \cdot \sqrt[3]{a^{-6}}}}{a \cdot \sqrt[4]{a \cdot \sqrt[3]{a^{-7}}}} \quad (4)$$

Lösungsdetails		Punkte
$= a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{-\frac{6}{9}} \cdot a^{-1} \cdot a^{-\frac{1}{4}} \cdot a^{\frac{7}{12}}$ $= a^0 = 1$		4
Abzüge:	Pro Fehler	-1

c)
$$9\log_a(b) + \log_a(8a) - \log_a(8b^9) \quad (3)$$

Lösungsdetails		Punkte
$= \log_a\left(\frac{b^9 \cdot 8a}{8b^9}\right)$ $= \log_a(a) = 1$		3
Abzüge:	Pro Fehler	-1