Mathematik

Serie A - Lösungen

Prüfungsdauer: 120 Minuten

Max. Punktezahl: 100 Punkte

Bewertungshinweise:

Mehrfachlösungen sind nicht gestattet.

Als Resultate gelten nur eindeutig gekennzeichnete Zahlen, Mengen oder Sätze.

Die Diagramme müssen korrekt beschriftet sein.

Bei fehlenden Antwortsätzen oder Lösungsmengen werden Punkte abgezogen.

Bei den einzelnen Ausrechnungsteilschritten gilt allgemein:
1. Fehler: Abzug von 50 % der maximalen Punktzahl dieses Teilschritts
2. Fehler: 0 Punkte für diesen Teilschritt

Es gibt keine halben Punkte.

Ist bei grafischen Lösungen die zugrunde liegende Funktionsgleichung falsch, diese falsche Funktion jedoch korrekt gezeichnet, müssen die Punkte für die grafische Darstellung gegeben werden.

Als Grundlage gilt das Dokument „Mathematik: Hinweise zur Lösungsdarstellung" vom November 2016, KKB Kanton Zürich.

Notenskala

Punkte	0 – 4	5 – 14	15 – 24	25 – 34	35 – 44	45 – 54	55 – 64	65 – 74	75 – 84	85 – 94	95 – 100
Note	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6

Aufgabe 1

6 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgendes Gleichungssystem.
$(\mathbb{G} = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$(1)\quad \frac{x+3}{x+1} - \frac{y+2}{y-1} = 0$$

$$(2)\quad \frac{3y+2}{y} = \frac{3x+1}{x}$$

Lösungsdetails		**Punkte**
$\mathbb{D}_x = \mathbb{R}\backslash\{0, -1\} \qquad \mathbb{D}_y = \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$		*1, 1*
$(1)\quad xy + 3y - x - 3 = xy + 2x + y + 2$		
$(1)\quad -3x + 2y = 5$		*1*
$(2)\quad 2x = y$		*1*
$x = 5 \qquad y = 10$		*1, 1*
$\mathbb{L} = \{(5;\ 10)\}$		
Abzüge:	*Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge*	*-1*

Aufgabe 2

7 Punkte

Tinas Eltern besitzen ein Auto im Wert von CHF 50'000.00, welches jährlich **linear** um CHF 3’000.00 abgeschrieben wird.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Abschreibungsfunktion für den Buchwert des Autos. (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$x = \text{Anzahl Jahre}$ $y = \text{Buchwert des Autos in CHF}$ $y = -3'000x + 50'000$		2
Abzüge:		

b) Tina besitzt zurzeit CHF 17‘000.00. Wegen einer Ausbildung wird sie in den nächsten 2 Jahren nichts zur Seite legen können. Danach plant sie, CHF 6‘000.00 pro Jahr zu sparen.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen für das Sparguthaben von Tina.
(Zinsen und Zinseszinsen sind nicht zu berücksichtigen.) (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$x = \text{Anzahl Jahre}$ $y = \text{Sparguthaben in CHF}$		
$y_1 = 17'000 \;\; (x \leq 2)$		1
$y_2 = 6'000x + c$ $17'000 = 6'000 \cdot 2 + c$ $c = 5'000$ $y_2 = 6'000x + 5'000 \;\; (x > 2)$ *oder* $y_2 = 6'000(x-2) + 17'000$		2
Abzüge:	*Fehlende Geltungsbereiche*	-1

c) Nach wie vielen Jahren besitzt Tina genug Geld, um das Auto zum Buchwert zu kaufen. (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$-3'000x + 50'000 = 6'000x + 5'000 \quad \rightarrow \quad x = 5$ *Nach 5 Jahren kann Tina das Auto zum Buchwert kaufen.*		1, 1
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	-1

Aufgabe 3

17 Punkte

Bei einem Dorffest möchte der Veranstalter ein Käse-Fondue in sein Angebot aufnehmen. Für die Mischung stehen zwei Käsesorten zur Auswahl: ein würziger Bergkäse (x in kg) und ein cremiger Rahmkäse (y in kg).
Pro Person rechnet er mit 250 g Käsemischung. Das Fondue soll für mindestens 150 Personen reichen. Beim Rahmkäse liegt eine Abnahmeverpflichtung von mindestens 15 kg vor. Für eine ausgewogene Mischung soll der Bergkäse mindestens 30 % der Mischung ausmachen. Allerdings soll vom Bergkäse maximal doppelt so viel wie vom Rahmkäse verwendet werden.

Der Bergkäse kostet im Einkauf pro Kilogramm CHF 29.50, der Rahmkäse CHF 25.50. Für den Einkauf stehen maximal CHF 5'000.00 zur Verfügung.

a) Erstellen Sie das lineare Programm und die Zielfunktion für die minimalen Kosten **(ohne Grafik)**. (6)

Lösungsdetails		**Punkte**
x = Menge Bergkäse in kg *y = Menge Rahmkäse in kg* *(x ≥ 0, y ≥ 0)*		
(1) $x + y \geq 0.25 \cdot 150$		*1*
(2) $y \geq 15$		*1*
(3) $x \geq 0.3(x + y)$		*1*
(4) $\mathrm{x} \leq 2y$		*1*
(5) $29.5x + 25.5y \leq 5'000$		*1*
$Zielfunktion\colon\ z = 29.5x + 25.5y$		*1*
Abzüge:		

b) Für ein anderes Dorffest wurden das lineare Programm und die Zielfunktion wie folgt angepasst: (7)

(1) $y \geq -x + 40$

(2) $y \geq 0.5x$

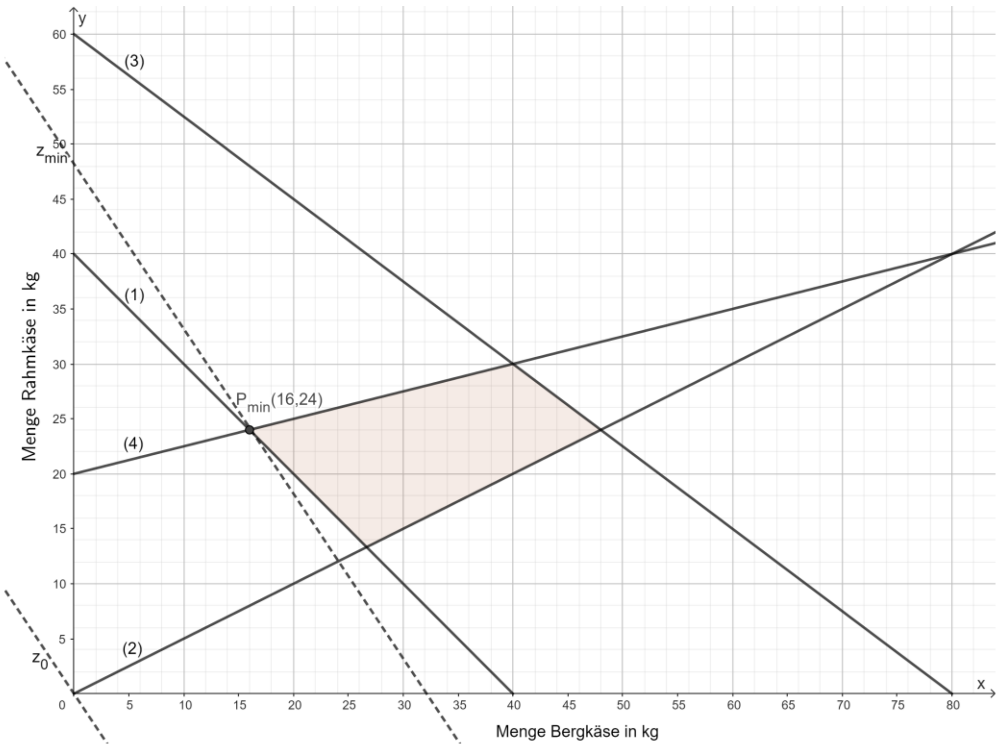
(3) $y \leq -\frac{3}{4}x + 60$

(4) $y \leq \frac{1}{4}x + 20$

$Zielfunktion\colon z = 30x + 20y$

Zeichnen Sie das entsprechende Planungspolygon mit Zielfunktion für die minimalen Kosten.

Verwenden Sie für die Skalierung des Koordinatensystems 5 Häuschen für 10 kg.

Lösungsdetails		**Punkte**
		*Geraden:* *4* *Polygon:* *1* z_{min}: *1* P_{min}: *1*
Abzüge:	*Fehlende Beschriftungen (Geraden)* *Fehlende Achsenbeschriftung inkl. Einheiten*	*Max. -1* *Max. -1*

c) Wie viele Kilogramm von jeder Käsesorte müssen verwendet werden, um minimale Kosten zu erzielen? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$(1) = (4) \quad \rightarrow \quad P_{min}(16; 24)$ *Es müssen 16 kg Bergkäse und 24 kg Rahmkäse verwendet werden, um minimale Kosten zu erzielen.*		*2*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

d) Wie hoch sind die minimalen Kosten pro Kilogramm Käsemischung? (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$\frac{30 \cdot 16 + 20 \cdot 24}{40} = 24$ *Die Gesamtkosten für diese Kombination betragen CHF 960.* *Die minimalen Kosten betragen CHF 24.00 pro Kilogramm Käsemischung.*		 *1* *1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 4

6 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmenge für folgende Gleichung. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

$$x + \frac{1}{x-7} = \frac{100-14x}{2x-14}$$

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{7\}$		*1*
$2x^2 - 14x + 2 = 100 - 14x$		
$2x^2 = 98$		
$x^2 = 49$		*2*
$x_1 = 7 \qquad x_2 = -7$		*1, 1*
$\mathbb{L} = \{-7\}$		*1*
Abzüge:		

Aufgabe 5

14 Punkte

Ein Hersteller von E-Bikes kann das Modell Turbo für CHF 2'500.00 pro Stück verkaufen. Aufgrund von Lagerkosten verläuft die Kostenfunktion quadratisch: $y_K = 10x^2 + 100'000$

a) Bestimmen Sie die Erlös- und die Gewinnfunktion. (3)

Lösungsdetails	Punkte
x = Anzahl E-Bikes in Stück	
y_E = Erlös in CHF *y_G = Gewinn in CHF*	
$y_E = 2'500x$	*1*
$y_G = y_E - y_K = 2'500x - (10x^2 + 100'000)$	
$y_G = -10x^2 + 2'500x - 100'000$	*2*
Abzüge:	

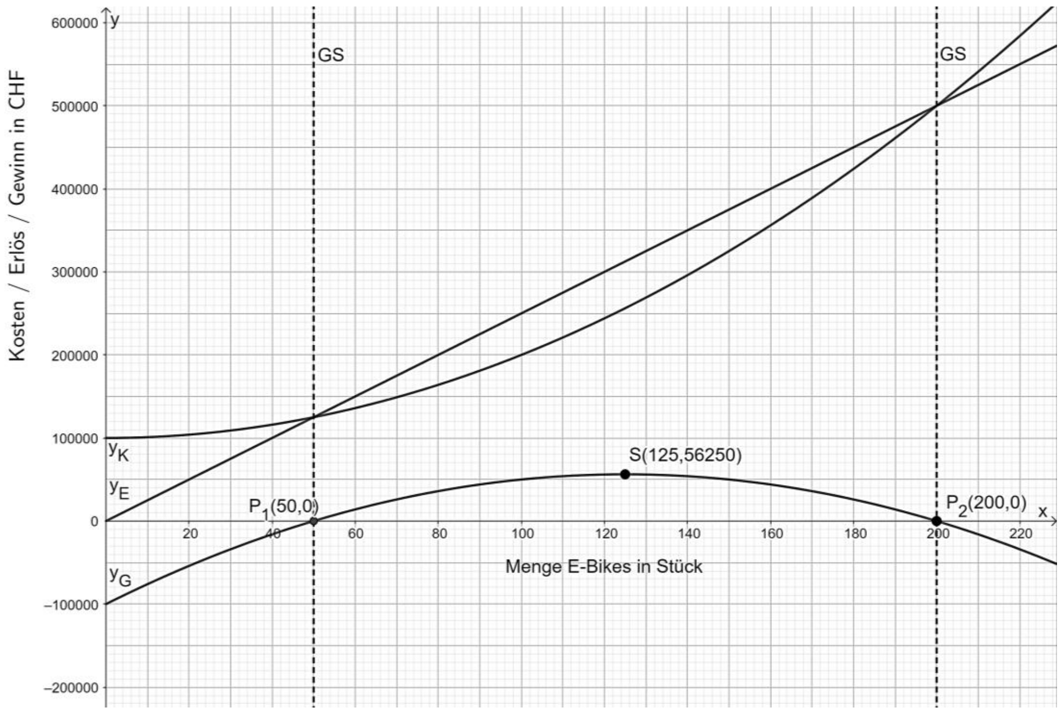
b) In welchem Stückzahlenbereich kann mit einem Gewinn gerechnet werden? (2)

Lösungsdetails	Punkte
$0 = -10x^2 + 2'500x - 100'000$	
$x_1, x_2 = \dfrac{-2'500 \pm \sqrt{2'500^2 - 4 \cdot (-10) \cdot (-100'000)}}{2 \cdot (-10)}$	
$x_1 = 50$	*1*
$x_2 = 200$	*1*
Zwischen 50 Stück und 200 Stück kann mit einem Gewinn gerechnet werden.	
Abzüge: *Fehlender Antwortsatz*	*-1*

c) Bei welcher Stückzahl ist der Gewinn maximal und wie gross ist dieser? (2)

Lösungsdetails	Punkte
$x_s = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = 125$	*1*
$y_s = (-10) \cdot 125^2 + 2'500 \cdot 125 - 100'000 = 56'250$	*1*
Der Gewinn ist bei 125 Stück am grössten. Er beträgt maximal CHF 56'250.00.	
Abzüge: *Fehlender Antwortsatz*	*-1*

d) Stellen Sie den Sachverhalt (inklusive Gewinnschwellen und maximalem Gewinn) graphisch dar. (5)

Lösungsdetails	**Punkte**
	y_E: *1* y_G: *2* *GS: 1* *S: 1*

Abzüge:	*Fehlende Beschriftungen*	*Max. -1*

e) Für welchen Betrag müsste ein E-Bike verkauft werden, damit bei der Produktion eine der Gewinnschwellen bei 500 Stück liegt? (2)

Lösungsdetails	**Punkte**
$y_E = y_K$ *(für x = 500)*	
$m \cdot x = 10x^2 + 100'000$	
$m \cdot 500 = 10 \cdot 500^2 + 100'000$	*1*
$m = 5'200$	*1*
Ein E-Bike müsste für CHF 5'200.00 verkauft werden.	

Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 6

10 Punkte

a) Wie gross muss der Zinssatz sein, damit ein Kapital in 34 Jahren um 50 % anwächst? Runden Sie das Resultat auf eine Dezimalstelle. (3)

Lösungsdetails		Punkte
$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$ $q = \sqrt[34]{1.5} = 1.011997\ldots$ $p = 1.2$ *Der Zinssatz muss 1.2 % betragen.*		*2* *1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz und / oder fehlende oder nicht korrekte Rundung*	*-1*

b) Ein Geschäftsauto (Neuwert CHF 84‘000.00) wird mit 23 % pro Jahr degressiv abgeschrieben. Wie viele ganze Jahre dauert es, bis der Buchwert des Autos erstmals unter CHF 30‘000.00 fällt? (3)

Lösungsdetails		Punkte
$n = \frac{\log(30'000) - \log(84'000)}{\log(0.77)} = 3.939\ldots$ *Es dauert 4 Jahre, bis der Buchwert des Autos erstmals unter CHF 30’000.00 fällt.*		*2, 1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

c) Wie viel Geld muss Laura bei ihrer Pensionierung auf dem Sparkonto haben, damit sie 20 Jahre lang jeweils anfangs Jahr CHF 75‘000.00 beziehen kann? Das Kapital wird über die ganze Zeit mit einem Zinssatz von 4.65 % verzinst.
Runden Sie das Resultat auf ganze Franken. (4)

Lösungsdetails		Punkte
$R_0 \cdot 1.0465^{20} = 75'000 \cdot 1.0465 \cdot \frac{1.0465^{20} - 1}{0.0465}$ $R_0 \cdot 1.0465^{20} = 2'501'307.402$ $R_0 = 1'007'818.706$ *Sie muss einen Betrag von CHF 1’007’819.00 auf dem Sparkonto haben.*		*2* *1* *1*
Abzüge:	*Fehlender Antwortsatz*	*-1*

Aufgabe 7

8 Punkte

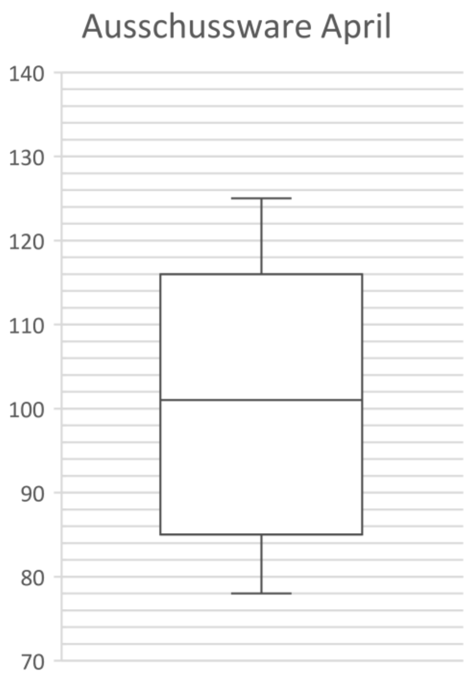
Eine Schokoladenfabrik erfasst täglich die Ausschussware (in kg). In den letzten 16 Tagen im Mai ergab dies folgende Messwerte:

74 / 81 / 81 / 82 / 87 / 87 / 87 / 93 / 95 / 98 / 98 / 101 / 103 / 120 / 124 / 129

a) Ermitteln Sie die folgenden Werte und tragen Sie diese in die Tabelle ein. (6)

Lösungsdetails		**Punkte**
Mittelwert	*96.25*	*1*
Median	*94*	*1*
Modus	*87*	*1*
Spannweite	*55*	*1*
1. Quartil	*83.25*	*1*
3. Quartil	*102.5*	*1*
Abzüge:		

b) Die Vergleichswerte aus dem Monat April sind im folgenden Boxplot dargestellt. (2)



Hat sich die Produktion im Mai bezüglich Ausschussware verbessert? Begründen Sie Ihre Antwort, indem Sie relevante Grössen miteinander vergleichen.

Lösungsdetails	**Punkte**
Ja, die Produktion hat sich verbessert.	*1*
Median, 1. Quartil, 3. Quartil und Minimum haben kleinere Werte angenommen. Einzig das Maximum ist leicht gestiegen.	*1*
Abzüge: *Vergleich von nur einer Grösse*	*-1*

Aufgabe 8

10 Punkte

Ermitteln Sie die Definitions- und die Lösungsmengen für folgende Gleichungen. ($\mathbb{G} = \mathbb{R}$)

a) $2\sqrt{x+3}+5=x$ (7)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}\vert x\geq -3\}$		*1*
$2\sqrt{x+3}=x-5$		*1*
$4(x+3)=(x-5)^2$		*1*
$4x+12=x^2-10x+25$		*1*
$0=x^2-14x+13$		*1*
$x_1=1 \qquad x_2=13$ $1\ ist\ eine\ Scheinlösung \quad\rightarrow\quad \mathbb{L}=\{13\}$		*1, 1*
Abzüge:	*Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge*	*-1*

b) $5\cdot 5^x=2\cdot 2^x$ (3)

Lösungsdetails		Punkte
$\mathbb{D}=\mathbb{R}$		*1*
$\frac{5^x}{2^x}=\frac{2}{5}$		*1*
$x=-1$		*1*
$\mathbb{L}=\{-1\}$		
Abzüge:	*Fehlende oder nicht korrekte Lösungsmenge*	*-1*

Aufgabe 9

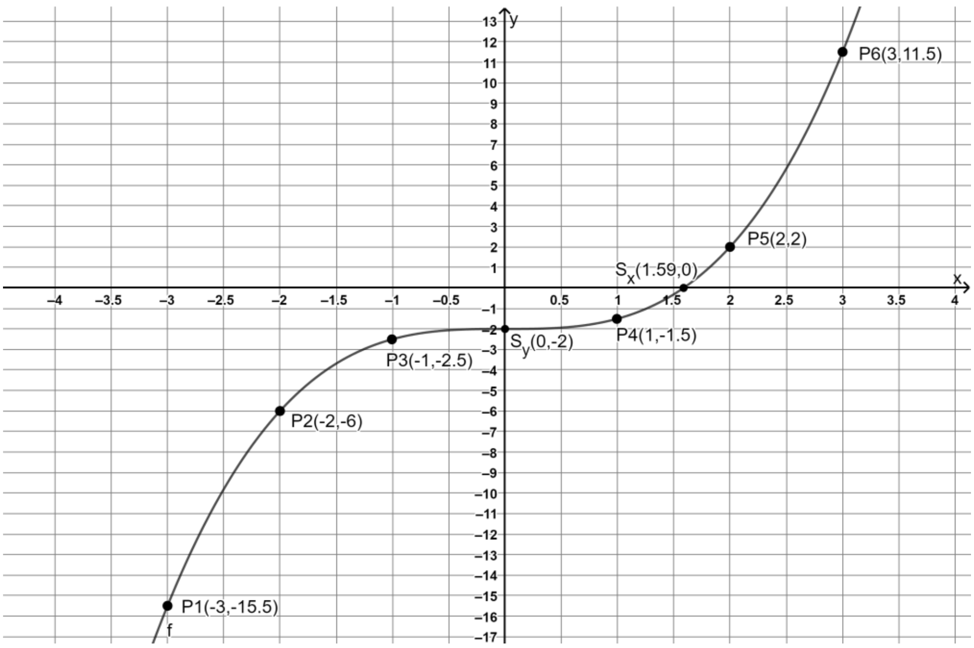
10 Punkte

Gegeben ist folgende Funktion $f\colon y = 0.5x^3 - 2$

a) Berechnen Sie allfällige Schnittpunkte mit den beiden Koordinatenachsen. (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$S_y(0;-2)$		*1*
$0 = 0.5x^3 - 2$		
$x = 1.587$		
$S_x\ (1.587; 0)$		*1*
Abzüge:	*Fehlende Punktedarstellung*	*-1*

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f in das vorgegebene Koordinatensystem. (4)

Lösungsdetails		**Punkte**
		*4*
Abzüge:	*Graph nur im Bereich* $[-2;\ 2]$	*-1*
	Achsenschnittpunkte nicht eingezeichnet	*-1*

c) Berechnen Sie allfällige Schnittpunkte der Funktion f mit der Geraden $g\colon y = -34$. (2)

Lösungsdetails		**Punkte**
$0.5x^3 - 2 = -34$		*1*
$x^3 = -64$		
$x = -4$		
$S\ (-4; -34)$		*1*
Abzüge:	*Fehlende Punktedarstellung*	*-1*

d) Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} und stellen Sie diese in der Form $y =\ldots$ dar. (2)

Lösungsdetails	**Punkte**
$x = 0.5y^3 - 2$	*1*
$x + 2 = 0.5y^3$	
$\frac{x+2}{\frac{1}{2}} = y^3$ *oder* $2(x+2) = y^3$	
$y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{\frac{1}{2}}}$ *oder* $y = \sqrt[3]{2(x+2)}$	*1*
Abzüge:	

Aufgabe 10

12 Punkte

Vereinfachen Sie die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $\frac{a}{a+2}+\frac{6}{a-2}-\frac{8}{a^2-4}$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$=\frac{a(a-2)+6(a+2)-8}{(a+2)(a-2)}$	*1*
$=\frac{a^2-2a+6a+12-8}{(a+2)(a-2)}=\frac{a^2+4a+4}{(a+2)(a-2)}$	*1*
$=\frac{(a+2)(a+2)}{(a+2)(a-2)}=\frac{a+2}{a-2}$	*1*
Abzüge:	

b) $\frac{\frac{a}{2b}-\frac{1}{2}}{1-\frac{a}{b}}$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$=\frac{\frac{a-b}{2b}}{\frac{b-a}{b}}$	*1*
$=\frac{a-b}{2b}\cdot\frac{b}{(-1)(a-b)}$	*1*
$=-\frac{1}{2}$	*1*
Abzüge:	

c) $\frac{\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a}}}{\sqrt[4]{a}}$ (3)

Lösungsdetails	Punkte
$=\frac{a^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot a^{\frac{1}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}}=a^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{4}}$	*1*
$=a^{\frac{9+4+2-3}{12}}$	*1*
$=a$	*1*
Abzüge:	

d) $log_a(b) + log_a(a-b) - log_a(ab-b^2)$ (3)

Lösungsdetails		**Punkte**
$log_a\left(\frac{b(a-b)}{b(a-b)}\right)$		*1*
$log_a 1 = 0$		*1, 1*
Abzüge:		